

بررسی کارایی بهینه سازی سبد سرمایه گذاری سهام با استفاده از مدل مارکویتز

نساء دباغی

دانشجوی دکترای تخصصی حسابداری دانشگاه آزاد اسلامی واحد بناب، ایران

Nesadabbaghi8@gmail.com

چکیده

هدف اصلی این تحقیق بررسی تأثیر الگوی میانگین-واریانس مارکویتز به عنوان متغیر مستقل بر کارایی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری سهام به عنوان متغیر وابسته است. این مطالعه به تحلیل عملکرد سبدهای سرمایه‌گذاری در صنایع دارویی، شیمیایی و غذایی که در سازمان بورس و اوراق بهادار فعالیت می‌کنند، پرداخته است. هدف از این پژوهش ارزیابی این موضوع است که آیا استفاده از الگوی میانگین-واریانس می‌تواند به صنایع مختلف در جهت کاهش ریسک و افزایش بازده کمک کند. پرسش‌های اصلی این تحقیق به دنبال پاسخ دادن به این موضوعات است که چگونه می‌توان سبد سرمایه‌گذاری را به گونه‌ای طراحی کرد که با حداکثر بازده و کمترین ریسک همراه باشد. در این راستا، الگوی مارکویتز به عنوان یک ابزار بهینه‌سازی سبد سهام، توانایی ایجاد یک سبد متنوع با ریسک کمتر و بازده بیشتر را مورد بررسی قرار می‌دهد. به علاوه، بررسی چگونگی به کارگیری شاخص‌های عملکردی همچون نسبت شارپ و نسبت تراینور در ارزیابی کارایی سبدهای سرمایه‌گذاری از اهداف دیگر این تحقیق است. این تحقیق از روش تحقیق کمی و از نوع پژوهش‌های کاربردی است. به منظور تجزیه و تحلیل داده‌ها، از آماره حداقل مربعات معمولی استفاده شده است. داده‌ها برای صنایع دارویی، شیمیایی و غذایی جمع‌آوری و تحلیل گردید و دوره زمانی تحقیق از سال ۱۳۹۷ تا ۱۴۰۱ را شامل می‌شود. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که استفاده از مدل میانگین-واریانس مارکویتز در بهینه‌سازی سبدهای سرمایه‌گذاری به‌طور مؤثری به کاهش ریسک و افزایش بازده در صنایع دارویی، شیمیایی و غذایی کمک می‌کند. با استفاده از این مدل، سبدهای بهینه قادرند عملکردی مطلوب‌تر نسبت به سبدهای غیر بهینه داشته باشند، که این امر با توجه به محدودیت‌های مختلف بازار مانند هزینه‌های معاملاتی و قوانین بورس قابل توجه است. به طور خاص، نسبت‌های شارپ و تراینور که برای ارزیابی کارایی سبدها استفاده شدند، نشان می‌دهند که سبدهای بهینه‌شده با این مدل، بازده بالاتری نسبت به ریسک ارائه می‌دهند. در این تحقیق، شاخص نسبت شارپ که نشان‌دهنده بازده به ازای هر واحد ریسک است، مقادیر قابل توجهی را برای سبدهای بهینه نشان داد، به طوری که این سبدها توانستند بازده بالاتری نسبت به سبدهای غیر بهینه با ریسک مشابه ارائه دهند. همچنین، نسبت تراینور که به ارزیابی بازده اضافی در ازای ریسک سیستماتیک می‌پردازد، نشان داد که سبدهای بهینه‌شده، عملکرد بهتری در مقایسه با سایر سبدها دارند.

واژگان کلیدی: کارایی بهینه‌سازی سهام، نسبت شارپ، نسبت ترینو، بازده سرمایه‌گذاری مدل مارکویتز

مقدمه

تخصیص بهینه منابع مالی به دارایی‌های مختلف یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران در بازارهای سرمایه است. دستیابی به یک سبد سرمایه‌گذاری که بتواند ضمن حداقل‌سازی ریسک، بازده مورد انتظار را حداکثر نماید، همواره هدف اصلی سرمایه‌گذاران و مدیران پرتفوی بوده است. برای نیل به این هدف، مدیران سرمایه‌گذاری به استفاده از مدل‌های مختلف بهینه‌سازی سبد سهام روی می‌آورند که در میان آن‌ها، مدل مارکوویتز به عنوان یکی از پایه‌گذارترین و شناخته‌شده‌ترین مدل‌ها شناخته می‌شود. این مدل که اولین بار توسط هنری مارکوویتز در دهه ۱۹۵۰ ارائه شد، توانسته است چارچوبی نظری برای ساخت سبدهای بهینه با در نظر گرفتن رابطه بین بازده و ریسک فراهم کند و از آن زمان تاکنون به طور گسترده در تحقیقات مالی و عملیاتی در سراسر جهان مورد استفاده قرار گرفته است (Markowitz, 1959). مدل مارکوویتز بر پایه مفاهیم میانگین-واریانس استوار است و به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که با استفاده از ترکیب دارایی‌های مختلف، ریسک کلی سبد سرمایه‌گذاری خود را کاهش دهند در حالی که بازده مورد انتظار را حفظ می‌کنند (Fama & French, 1993). این مدل با استفاده از داده‌های تاریخی و پیش‌بینی‌های مربوط به بازده و همبستگی بین دارایی‌ها، بهترین ترکیب سبد را ارائه می‌دهد. با این حال، یکی از چالش‌های اصلی استفاده از مدل مارکوویتز در بازارهای مالی واقعی، شناسایی دقیق داده‌ها و پیش‌بینی‌های قابل اعتماد است که تحت تأثیر عوامل مختلف از جمله نوسانات بازار، هزینه‌های معاملاتی و محدودیت‌های قانونی قرار دارد. با توجه به نوسانات فزاینده و پیچیدگی‌های موجود در بازارهای مالی، شناسایی الگوهایی که بتوانند در شرایط واقعی بازار نیز کارآمد باشند، اهمیت دوچندانی یافته است (Black, Jensen, & Scholes, 1972). به همین دلیل، تحقیق در زمینه بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از مدل مارکوویتز، به ویژه در بازارهای نوظهور و در حال توسعه مانند بورس اوراق بهادار تهران، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بازارهای مالی ایران به دلیل تحریم‌ها، نوسانات اقتصادی و محدودیت‌های قانونی، ویژگی‌های خاص خود را دارند که باعث می‌شود نیاز به تحلیل دقیق‌تر و بهینه‌سازی هوشمندانه‌تر سبدهای سرمایه‌گذاری بیش از پیش احساس شود.

بیان مسئله

در بازارهای مالی، یکی از مهم‌ترین مسائل پیش‌روی سرمایه‌گذاران، تخصیص بهینه منابع مالی است که نه تنها باید ریسک را به حداقل رسانده بلکه بازده مورد انتظار را نیز به حداکثر برساند. در این راستا، استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به‌عنوان ابزاری برای دستیابی به این هدف همواره مورد توجه قرار گرفته است. مدل میانگین-واریانس مارکوویتز، که اولین بار توسط هنری مارکوویتز در دهه ۱۹۵۰ معرفی شد، یکی از مهم‌ترین و شناخته‌شده‌ترین مدل‌ها در این زمینه است که می‌تواند به سرمایه‌گذاران کمک کند تا با در نظر گرفتن ریسک و بازده، بهترین ترکیب دارایی‌ها را انتخاب کنند. این مدل، با استفاده از داده‌های تاریخی و پیش‌بینی‌های مرتبط با بازده و همبستگی دارایی‌ها، سبد بهینه‌ای را پیشنهاد می‌دهد که در آن ریسک و بازده به طور همزمان بهینه شده‌اند. با این حال، چالش‌های متعددی برای پیاده‌سازی این مدل در بازارهای مالی واقعی، به ویژه در بازارهای نوظهور وجود دارد. در بازارهای نوظهور، عواملی همچون نوسانات بالا، عدم شفافیت اطلاعاتی، تحریم‌های اقتصادی و هزینه‌های معاملاتی می‌توانند کارایی مدل‌های کلاسیک را محدود کنند. بازار سرمایه ایران نیز با ویژگی‌های خاص خود، مانند تحریم‌ها، تورم بالا، و نوسانات سیاسی و اقتصادی، شرایط پیچیده‌ای را برای سرمایه‌گذاران ایجاد کرده است که ممکن است بر کارایی مدل مارکوویتز تأثیر بگذارد (Zhou & Li, 2018). در این تحقیق، هدف بررسی تأثیر مدل مارکوویتز بر بهینه‌سازی سبدهای سرمایه‌گذاری سهام در بورس اوراق بهادار تهران است. به ویژه، این مطالعه به تحلیل عملکرد سبدهای سرمایه‌گذاری در صنایع دارویی، شیمیایی و غذایی می‌پردازد که از جمله صنایع مهم

و فعال در بورس تهران هستند. بررسی این صنایع به دلیل ویژگی‌های خاص خود در بازار ایران و تأثیرات مختلف اقتصادی، اهمیت دارد و می‌تواند اطلاعات جدیدی درباره تطابق مدل مارکویتز با شرایط واقعی بازار ارائه دهد.

اهمیت و ضرورت پژوهش

مدل بهینه‌سازی میانگین-واریانس که توسط هری مارکویتز در سال ۱۹۵۲ معرفی شد، از زمان ظهور خود به‌عنوان یکی از پایه‌های اصلی نظریه نوین مدیریت سرمایه‌گذاری شناخته می‌شود و به‌طور گسترده در تخصیص بهینه منابع مالی به دارایی‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. این مدل با تمرکز بر دو مؤلفه اصلی میانگین بازده و واریانس بازده، به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که ترکیب بهینه‌ای از دارایی‌ها را انتخاب کرده و در عین کاهش ریسک، به بازده مطلوب دست یابند. با پیشرفت‌های صورت گرفته در دهه‌های اخیر و توسعه مدل‌های جدیدتر مانند مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، چارچوب‌های تصمیم‌گیری در شرایط ریسک به‌طور قابل توجهی گسترش یافته است. با این حال، با وجود موفقیت‌های مدل مارکویتز در تحقیقات نظری و کاربردی، انتقادات فراوانی نسبت به استفاده عملی آن در بازارهای مالی، به‌ویژه در بازارهای نوظهور، مطرح شده است. این انتقادات عمدتاً به حساسیت بالای مدل به برآورد پارامترها و نرمال نبودن توزیع بازدهی دارایی‌ها اشاره دارند. به‌ویژه در بازارهایی که شرایط اقتصادی و سیاسی خاص دارند، مانند بازار سرمایه ایران، به دلیل نوسانات شدید، تحریم‌ها، و مشکلات اطلاعاتی، کاربرد این مدل به شکل سنتی می‌تواند محدودیت‌هایی را به همراه داشته باشد. این موضوع در پژوهش‌های مختلفی از جمله تحقیق صادقی، سروش و فرهانیان (۱۳۸۶) نیز به‌طور خاص مورد توجه قرار گرفته است. آنان با بررسی داده‌های بورس تهران به این نتیجه رسیدند که مدل‌های مبتنی بر فرض نرمال بودن داده‌ها در این بازار ممکن است نتایج دقیقی ارائه ندهند و معیارهای ریسک جدید و کاراتر می‌توانند به پیش‌بینی بازده بهتر کمک کنند. در نتیجه، اهمیت این پژوهش از آنجا ناشی می‌شود که استفاده از مدل مارکویتز در بازار ایران، به‌ویژه در صنایع خاص مانند صنایع دارویی، شیمیایی و غذایی، نیاز به ارزیابی مجدد دارد. این تحقیق می‌تواند به تحلیل این بپردازد که آیا مدل مارکویتز در شرایط خاص اقتصادی ایران می‌تواند همچنان به‌عنوان ابزاری کارآمد برای تخصیص بهینه دارایی‌ها مورد استفاده قرار گیرد و آیا می‌توان با استفاده از این مدل، عملکرد بهینه‌تری نسبت به سبدهای سرمایه‌گذاری غیر بهینه در بازار ایران بدست آورد.

ادبیات و پیشینه

اسدی و بیات (۱۳۹۶) در تحقیق خود با عنوان "بهینه‌سازی پرتفوی سهام: سودمندی الگوریتم پرندگان و مدل مارکویتز" به این نکته اشاره کردند که هدف اصلی در مدیریت پرتفوی انتخاب مجموعه‌ای از سهام است که بیشترین بازده را برای سرمایه‌گذاران فراهم کند. در این پژوهش، از الگوریتم پرندگان و مدل مارکویتز برای انتخاب سبد سهام استفاده و مقایسه‌ای میان این دو روش انجام شد. هدف اصلی این تحقیق معرفی مدلی برای انتخاب پرتفوی به گونه‌ای است که سرمایه‌گذاران بتوانند با استفاده از آن، تصمیمات بهینه‌ای برای انتخاب سبد خود بگیرند. در این پژوهش، ۶۵ شرکت از میان شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران برای دوره زمانی ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲ به عنوان نمونه انتخاب شده و داده‌ها ابتدا در نرم‌افزار EXCEL جمع‌آوری و سپس با استفاده از MATLAB تجزیه و تحلیل شدند. نتایج نشان‌دهنده برتری الگوریتم پرندگان نسبت به مدل مارکویتز از نظر خطای کمتر در انتخاب سبد بهینه سرمایه‌گذاری بود. پیشنهاد اصلی برای تحقیقات آینده، مقایسه الگوریتم پرندگان با سایر مدل‌های بهینه‌سازی مانند رقابت استعماری، فرا ابتکاری و مدل‌های آربیتراژ است.

یاکیده و همکاران (۱۳۹۶) در مقاله‌ای تحت عنوان "بررسی عملکرد مدل‌های مارکویتز و GMD در انتخاب پرتفوی بهینه" بیان کردند که مشکل اصلی سرمایه‌گذاران در بازار بورس، شناسایی مجموعه‌ای از سهام است که بیشترین مطلوبیت را داشته باشد. هدف این پژوهش، ایجاد بهترین پرتفوی ممکن با کمترین ریسک و بالاترین بازده است. برای این منظور، از دو مدل مارکویتز و GMD استفاده شد. در مدل مارکویتز، میانگین به عنوان شاخص بازده و واریانس به عنوان معیاری از ریسک به کار می‌رود، در حالی که در مدل GMD، ریسک به وسیله میانگین قدرمطلق بازده‌ها اندازه‌گیری می‌شود. این پژوهش عملکرد هر دو مدل را از طریق تشکیل پرتفوی بهینه و آزمون آن در بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار داد.

شهرستانی و همکاران (۱۳۸۹) در تحقیق خود با عنوان "تعمیم نظریه مارکویتز در بهینه‌سازی سبد سهام" اشاره کردند که مدل مارکویتز در انتخاب سهم‌های هر پرتفوی بر اساس حداکثر کردن بازده انتظاری طراحی شده است. این مدل امید ریاضی ارزش هر سهم را در نظر می‌گیرد و نوسانات آن را به صورت ثابت و برونزا در نظر می‌گیرد. در این مقاله، با ترکیب نظریات مارکویتز و شارپ، مدلی جدید ارائه شده که نسبت به مدل مارکویتز مزیت‌هایی دارد. در مدل پیشنهادی، از طریق درونزا کردن کوواریانس‌ها، بازده انتظاری برای هر سطح مشخص ریسک همواره بیشتر یا مساوی با مدل مارکویتز است. این مدل با استفاده از شرکت‌های سیمان فعال در بورس تهران و مقایسه آن با مدل مارکویتز، کارایی بالاتری را نشان می‌دهد.

پاکمرام و همکاران (۱۳۹۶) در تحقیق خود با عنوان "انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک، با بهره‌گیری از مدل میانگین-نیمه واریانس مارکویتز" به بررسی بازارهای فعال و پویا در کشورهای صنعتی و توسعه‌یافته پرداختند. در این تحقیق، از سه الگوریتم ژنتیک، فرهنگی و ازدحام ذرات برای بهینه‌سازی سبد سهام استفاده شد. ۱۰۶ شرکت پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران در دوره زمانی ۱۳۸۶ تا ۱۳۹۳ به عنوان نمونه آماری انتخاب شدند. نتایج پژوهش نشان داد که هیچ اختلاف معنی‌داری بین میانگین بازده سرمایه‌گذاری در سبدهای منتخب با استفاده از این سه الگوریتم وجود ندارد. اما از نظر مقایسه دو الگوریتم، الگوریتم ژنتیک توانست با کمترین خطا بهترین نتیجه را ارائه دهد و نسبت به سایر الگوریتم‌ها برتری نشان داد.

مهرآرا و صادقیان (۱۳۸۷) در مقاله‌ای با عنوان "تعیین ترکیب بهینه وام در بخش‌های اقتصادی: مطالعه موردی بانک سامان" اشاره کردند که در این پژوهش، ترکیب بهینه پرتفوی اعتباری بانک سامان در بخش‌های مختلف اقتصادی با استفاده از مدل مارکویتز محاسبه شد. نتایج این تحقیق نشان داد که بخش‌های خدمات، صنعت، معدن، مسکن و ساختمان بیشترین سهم را در پرتفوی بهینه وام بانک دارند. همچنین، بررسی مقایسه‌ای روند اعطای تسهیلات بانک سامان با پرتفوی بهینه نشان داد که مدل مارکویتز با الگوی تخصیص اعتبارات بانک در این دوره سازگاری خوبی دارد، اگرچه این مدل نتوانست تمام تفاوت‌ها و انحرافات کمی را توضیح دهد.

جی (۲۰۲۴) در مقاله‌ای با عنوان مقایسه بهینه‌سازی سبد سهام تحت مدل مارکویتز در بخش‌های فناوری و خدمات مالی بیان داشت این مقاله به تحلیل مقایسه‌ای بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از مدل مارکویتز در دو بخش مختلف اقتصادی، یعنی بخش فناوری و خدمات مالی، می‌پردازد. هدف این پژوهش این بود که سبدهای بهینه در هر بخش اقتصادی را با استفاده از مدل مارکویتز ارزیابی کرده و عملکرد آنها را با هم مقایسه کند. پژوهشگر داده‌های مربوط به سهام شرکت‌های فعال در این دو بخش را جمع‌آوری و با استفاده از مدل مارکویتز، بهینه‌سازی سبد را انجام داده است. نتایج نشان می‌دهد که بخش فناوری دارای سبدهای بهینه‌ای با بازده بالاتر از بخش خدمات مالی است. این یافته‌ها می‌تواند به سرمایه‌گذاران کمک کند تا در انتخاب بخش‌های اقتصادی برای سرمایه‌گذاری‌های خود تصمیمات بهتری بگیرند.

یوسان و ریادی (۲۰۲۴) در مقاله‌ای با عنوان " بهینه‌سازی سبد سهام: کاربرد و مقایسه مدل مارکویتز و مدل شاخص واحد در سهام LQ45 بورس اندونزی" بیان داشتند این پژوهش به مقایسه دو مدل معروف بهینه‌سازی سبد سهام یعنی مدل مارکویتز و مدل شاخص واحد می‌پردازد. بررسی‌ها بر روی بورس سهام LQ45 اندونزی در دو سال ۲۰۲۲ و ۲۰۲۳ انجام شده است. مدل مارکویتز به‌عنوان یک مدل میانگین-واریانس، بازده و ریسک را برای انتخاب سبد بهینه مدیریت می‌کند. پژوهشگران این دو مدل را از نظر میزان بازده و ریسک در بورس اندونزی مورد ارزیابی قرار داده‌اند. یافته‌ها نشان می‌دهد که مدل مارکویتز در سال ۲۰۲۲ بازده بهتری از مدل شاخص واحد داشت، اما در سال ۲۰۲۳ این تفاوت به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش یافت. این پژوهش نشان می‌دهد که در بازارهای نوظهور مانند بورس اندونزی، مدل مارکویتز قادر است سبدهای بهینه‌تری تولید کند، ولی به‌ویژه در دوره‌های نوسان زیاد، مدل‌های دیگر مانند شاخص واحد ممکن است عملکرد بهتری از خود نشان دهند.

یانگ (۲۰۲۴) در مقاله‌ای با عنوان "تحلیل بهینه مدل مارکویتز: مطالعه موردی صنعت وسایل نقلیه انرژی نو و خودروسازی" بیان داشت این مقاله به بررسی بهینه‌سازی سبد سهام در صنعت خودروسازی و وسایل نقلیه انرژی نو با استفاده از مدل مارکویتز می‌پردازد. پژوهشگر از داده‌های تاریخی سهام شرکت‌های خودروسازی و تولیدکنندگان وسایل نقلیه انرژی نو استفاده کرده و سبد بهینه سهام را با استفاده از مدل مارکویتز بهینه‌سازی کرده است. هدف اصلی این پژوهش، مقایسه عملکرد سبد بهینه در این دو صنعت با هم است. نتایج نشان می‌دهند که شرکت‌های فعال در صنعت وسایل نقلیه انرژی نو، با توجه به ویژگی‌های خاص این صنعت و پتانسیل رشد آن، سبد بهینه بهتری در مقایسه با شرکت‌های خودروسازی سنتی دارند. استفاده از مدل مارکویتز در این صنعت می‌تواند بازده بالاتری به‌دنبال داشته باشد.

کولالی (۲۰۱۶) در مقاله‌ای تحلیل بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از مدل مارکویتز بیان داشت این مقاله به تحلیل کارایی مدل مارکویتز در بورس استانبول می‌پردازد و سعی دارد نشان دهد که چگونه می‌توان با استفاده از این مدل، سبدهای بهینه‌ای با ترکیبی از سهام مختلف ایجاد کرد. پژوهشگر ابتدا داده‌های تاریخی سهام شرکت‌های فعال در بورس استانبول را گردآوری و سپس با استفاده از روش‌های مارکویتز، سبدهای بهینه را بر اساس کمترین ریسک و بیشترین بازده انتخاب کرده است. یافته‌ها نشان می‌دهند که مدل مارکویتز قادر است تا در بازارهای در حال توسعه مانند بورس استانبول، سبدهای بهینه‌ای با حداقل ریسک و بیشترین بازده ایجاد کند. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهند که استفاده از این مدل در بورس‌های با نوسانات بالا نیز می‌تواند کاربردی باشد.

ویجو و همکاران (۲۰۰۵) در مقاله‌ای با عنوان "بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از مدل مارکویتز: کاربرد در بورس باکو بیان داشتند که این پژوهش به بررسی کاربرد مدل مارکویتز در بهینه‌سازی سبد سهام بورس باکو، پایتخت جمهوری آذربایجان، می‌پردازد. در این تحقیق، پژوهشگران با استفاده از داده‌های بورس باکو، مدل مارکویتز را برای انتخاب سبد بهینه با کمترین ریسک و بیشترین بازده پیاده‌سازی کردند. داده‌های مورد استفاده برای این تحلیل مربوط به سهام شرکت‌های فعال در بورس باکو در دوره‌ای چندساله بودند. نتایج نشان می‌دهند که مدل مارکویتز برای بهینه‌سازی سبد سهام در بورس‌های نوظهور مانند بورس باکو مناسب است و به‌ویژه برای سرمایه‌گذاران نهادهای مالی که به دنبال دستیابی به بازده مطلوب هستند، ابزاری مناسب محسوب می‌شود.

اهداف پژوهش

هدف اصلی این پژوهش، بررسی میزان کارایی مدل مارکویتز در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری سهام در بازار بورس اوراق بهادار تهران است. در این راستا، پژوهش حاضر به تحلیل میزان انطباق فرضیات مدل مارکویتز با ویژگی‌های ساختاری و رفتاری بازار سرمایه ایران می‌پردازد. همچنین، توانایی این مدل در کاهش ریسک پرتفوی در مقایسه با سبدهای غیر بهینه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. علاوه بر این، تأثیر تغییر در پارامترهای ورودی مدل شامل میانگین و واریانس بازده بر نتایج فرآیند بهینه‌سازی بررسی می‌شود. در نهایت، پژوهش تلاش می‌کند پیشنهادهایی کاربردی برای بهبود فرآیند تشکیل سبد سرمایه‌گذاری در بازارهای نوظهور، با توجه به یافته‌های تحقیق، ارائه کند.

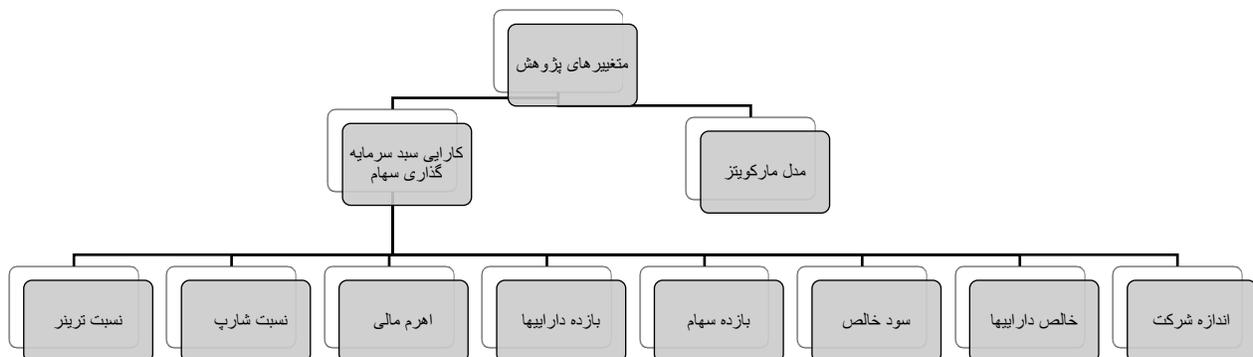
فرضیه‌های پژوهش

با توجه به اهداف پژوهش، فرضیه‌های این مطالعه به شرح زیر تدوین شده است. فرضیه اول بیان می‌کند که مدل مارکویتز قادر است سبد سرمایه‌گذاری با ریسک کمتر و بازدهی بالاتر نسبت به انتخاب تصادفی سهام ارائه دهد. فرضیه دوم این‌گونه بیان می‌شود که میزان کارایی مدل مارکویتز در بازار بورس اوراق بهادار تهران به دلیل ویژگی‌های خاص این بازار، کمتر از بازارهای توسعه‌یافته خواهد بود. فرضیه سوم نیز به این نکته اشاره دارد که تغییرات در برآورد میانگین بازده و واریانس دارایی‌ها به طور معناداری بر کارایی نتایج مدل مارکویتز اثرگذار خواهد بود.

روش تحقیق

پژوهش حاضر از نوع تحقیقات کاربردی است و با استفاده از روش توصیفی-تحلیلی انجام می‌شود. جامعه آماری این تحقیق، شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران است که داده‌های مالی آن‌ها برای دوره زمانی ۱۳۹۷ تا ۱۴۰۱ در دسترس است. از این میان، شرکت‌هایی که اطلاعات مالی کامل و معتبر در دسترس دارند، به عنوان نمونه تحقیق انتخاب شده‌اند. داده‌های مورد نیاز برای این تحقیق شامل قیمت‌های پایانی سهام شرکت‌های منتخب، اطلاعات مالی و نرخ بازده دارایی‌ها در طی دوره زمانی مورد مطالعه است. این داده‌ها از منابع معتبر مانند سایت رسمی بورس اوراق بهادار تهران، پایگاه‌های اطلاعاتی مالی و گزارش‌های سالانه شرکت‌ها استخراج خواهد شد.

نمودار ۱ متغیرها و مدل پژوهش



در این پژوهش، ابتدا بازده مورد انتظار سهام و واریانس آن‌ها محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از مدل مارکوویتز، سبدهای بهینه سرمایه‌گذاری از نظر ریسک و بازده برای سهام انتخابی طراحی می‌شوند. مدل مارکوویتز بر اساس محاسبه میانگین بازده و واریانس، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را انجام می‌دهد و رابطه بین ریسک و بازده برای ترکیب‌های مختلف سهام را بررسی می‌کند. برای ارزیابی کارایی مدل، بازده سبدهای بهینه به دست آمده با سبدهای تصادفی و همچنین شاخص‌های بازار مقایسه می‌شود. همچنین، تحلیل حساسیت به تغییرات در میانگین بازده و واریانس دارایی‌ها انجام می‌شود تا تاثیر این تغییرات بر کارایی نتایج بهینه‌سازی بررسی گردد. مدل‌های استفاده‌شده در این تحقیق شامل مدل مارکوویتز برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از پارامترهای میانگین و واریانس است. همچنین برای ارزیابی دقت و صحت نتایج، از آزمون‌های آماری نظیر آزمون‌های تی برای مقایسه میانگین‌ها و تحلیل حساسیت استفاده خواهد شد.

مدل مارکوویتز که نخستین بار توسط هری مارکوویتز در سال ۱۹۵۲ معرفی شد، یکی از شناخته‌شده‌ترین مدل‌ها برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری است. این مدل بر پایه انتخاب ترکیب بهینه‌ای از دارایی‌ها استوار است که به موجب آن بازده مورد نظر با حداقل ریسک ممکن حاصل می‌شود. به طور مشخص، هدف اصلی این مدل، به حداکثر رساندن بازده سبد سرمایه‌گذاری به ازای یک سطح مشخص از ریسک است. در مدل مارکوویتز، ریسک به عنوان انحراف معیار بازده دارایی‌ها و سبد تعریف می‌شود، در حالی که بازده سبد به عنوان میانگین وزنی بازده‌های دارایی‌های مختلف محاسبه می‌شود. هدف اصلی مدل مارکوویتز، بهینه‌سازی ترکیب دارایی‌ها به گونه‌ای است که بازده سبد حداکثر و ریسک آن به حداقل برسد. این فرآیند شامل محاسبه وزن‌های بهینه هر دارایی در سبد است، به طوری که عملکرد سبد بهینه شده و در عین حال ریسک آن کاهش یابد. برای به دست آوردن وزن‌های بهینه، از تابع بهینه‌سازی زیر استفاده می‌شود:

$$\max(w_1, w_2, \dots, w_n) E(R_p)$$

$$\text{subject to } \sum w_i = 1 \text{ and } w_i \geq 0$$

که در آن $E(R_p)$ بازده مورد انتظار سبد است. w_i وزن دارایی i در سبد است. $\sum w_i = 1$ محدودیت اصلی است که وزن‌های سبد باید جمعاً برابر با ۱ باشد. بازده مورد انتظار سبد، میانگین وزنی بازده‌های هر یک از دارایی‌ها است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_p) = w_1 * E(R_1) + w_2 * E(R_2) + \dots + w_n * E(R_n)$$

که در آن $E(R_i)$ بازده مورد انتظار دارایی i و w_i وزن دارایی i در سبد است. ریسک سبد از طریق انحراف معیار بازده سبد محاسبه می‌شود که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_p = \sqrt{(w_1^2 * \sigma_1^2 + w_2^2 * \sigma_2^2 + \dots + w_n^2 * \sigma_n^2 + 2 * \sum w_i * w_j * \text{Cov}(R_i, R_j))}$$

در این فرمول، σ_i انحراف معیار بازده دارایی i و $\text{Cov}(R_i, R_j)$ کوواریانس بین بازده‌های دارایی‌های i و j است.

پس از انجام بهینه‌سازی سبد، برای ارزیابی عملکرد آن از معیارهای مختلفی مانند نسبت شارپ و نسبت ترینر استفاده می‌شود. نسبت شارپ برای ارزیابی کارایی سبد نسبت به ریسک به کار می‌رود. این نسبت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = (E(R_p) - R_f) / \sigma_p$$

که در آن $E(R_p)$ بازده مورد انتظار سبد، R_f نرخ بازده بدون ریسک و σ_p انحراف معیار سبد است. نسبت ترینر برای ارزیابی کارایی سبد بر اساس ریسک سیستماتیک (ریسک بازار) استفاده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T = (E(R_p) - R_f) / \beta_p$$

که در آن β_p نمایانگر حساسیت سبد به نوسانات بازار است.

یافته‌ها

در این پژوهش، هدف اصلی بررسی کارایی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری سهام با استفاده از مدل مارکوویتز بود. به منظور دستیابی به سبد بهینه‌شده، از داده‌های بازده پنج سهم مختلف شامل "دجابر"، "دابور"، "شارک"، "شفن" و "غشصفا" طی سال‌های ۱۳۹۷ تا ۱۴۰۱ استفاده شد. پس از اعمال محدودیت‌های مورد نظر که شامل الزام به کامل بودن سرمایه‌گذاری (تمامی وزن‌ها باید برابر با ۱ باشد) و عدم استفاده از موقعیت‌های کوتاه (فقط سرمایه‌گذاری‌های بلندمدت) بود، سبد بهینه‌شده محاسبه گردید.

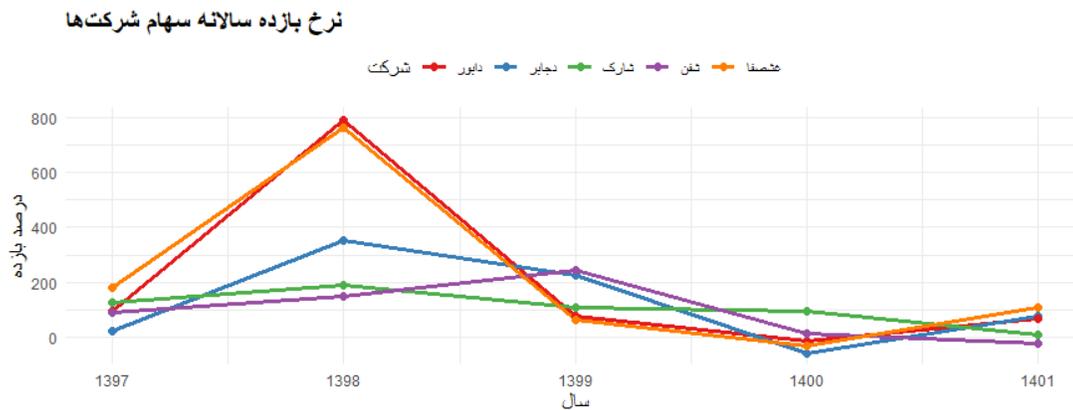
جدول ۱ آمار توصیفی

متغیر	میانگین	انحراف معیار	کمینه	بیشینه
بازده دارایی	۰.۲۷۸	۰.۱۵۷	۰.۱۱۵	۰.۶۳۷
بازده حقوق صاحبان سهام	۱.۳۲	۱.۸۷	-۰.۵۴	۵.۸۱
اهرم مالی	۰.۷۶	۰.۵۵	۰.۲۹	۲.۱
نسبت شارپ	۵۱.۲۶	۸۵.۱۱	-۵۳.۱۸	۳۴۰.۴۲
نسبت تینرز	۱.۰۳۸	۱.۷۲۷	-۷.۰۵۸	۵.۶۱۷
سود خالص	۱۸۱.۷	۲۲۸.۶۳	-۵۶.۲۸	۷۹۱.۳۷

در تحلیل عملکرد سبد بهینه‌شده، سه شاخص کلیدی نسبت شارپ، نسبت تینرز و بازده بهینه‌ی مارکوویتز مورد بررسی قرار گرفت. مقدار نسبت شارپ برابر با ۱۹.۹۷۸ نشان‌دهنده عملکرد بسیار مطلوب این سبد از نظر بازده تعدیل‌شده با ریسک کل است؛ یعنی سبد توانسته به ازای هر واحد ریسک کل (انحراف معیار)، بازده قابل توجهی ایجاد کند. از سوی دیگر، نسبت تینرز برابر با ۰.۱۳۶ بیانگر آن است که این سبد در برابر ریسک سیستماتیک نیز بازده نسبتاً مناسبی ارائه داده است، هرچند نسبت به برخی پورتفوی‌های دیگر مقدار پایین‌تری دارد. همچنین، بازده مورد انتظار سالانه سبد بهینه بر اساس مدل مارکوویتز برابر با ۳۰.۷۹ درصد به دست آمده است که نشان از عملکرد بسیار موفق این سبد در تخصیص وزنی دارایی‌ها دارد. البته باید توجه داشت که این بازده بالا با ریسک کل نسبتاً بالا معادل ۲۰۳.۱۹ درصد همراه بوده است که بیانگر نوسانات شدید در ترکیب دارایی‌ها است. مجموع این شاخص‌ها نشان می‌دهد که سبد بهینه هرچند با پذیرش سطح قابل توجهی از ریسک در دستیابی به بازده بالا موفق بوده است.

در این بخش، به تحلیل بازدهی سالانه سهام پنج شرکت بورسی شامل دابور، دجا، شارک، شفن و غشا در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۷ تا ۱۴۰۱ پرداخت شده است. تحلیل بازدهی سالانه این پنج شرکت نشان می‌دهد که شرکت‌های فعال در صنایع داروسازی و پتروشیمی در بازه زمانی ۱۳۹۷ تا ۱۳۹۹ با رشد سودآوری مواجه بوده‌اند. عوامل مختلفی از جمله افزایش تقاضا، بهبود فرآیندهای تولید و مدیریت هزینه‌ها در این رشد مؤثر بوده‌اند. با این حال، نوسانات اقتصادی و تغییرات نرخ ارز نیز تأثیراتی بر عملکرد مالی این شرکت‌ها داشته است.

نمودار ۲ درصد بازده هر سهم



برای ارزیابی عملکرد سبد بهینه‌شده، ابتدا بازده سالانه آن محاسبه شد. نتایج نشان می‌دهند که سبد بهینه‌شده در طول پنج سال به طور متفاوت عمل کرده است. بازده سبد بهینه‌شده در سال ۱۳۹۷ برابر با ۱۰۳.۷۵ درصد بود که نشان‌دهنده عملکرد مثبت در این سال است. در سال ۱۳۹۸ بازده سالانه ۵۰۰.۰۸ درصد بوده که نشان‌دهنده یک عملکرد استثنایی است. این بازده بسیار بالا در این سال ممکن است به دلیل شرایط خاص بازار و تغییرات شدید قیمت‌ها باشد. در سال ۱۳۹۹ بازده سبد بهینه‌شده کاهش پیدا کرده و به ۸۵.۷۹ درصد رسید. اگرچه هنوز بازده مثبت است، اما نسبت به سال‌های قبلی کاهش یافته است. در سال ۱۴۰۰ شاهد کاهش قابل توجه بازده سبد بود و به منفی ۶.۵۹ درصد رسید. این کاهش می‌تواند ناشی از نوسانات منفی بازار یا تغییرات اقتصادی باشد. در سال ۱۴۰۱ بازده دوباره افزایش یافته و به ۳۰۰.۷۹ درصد رسید. این افزایش دوباره نشان‌دهنده بهبود عملکرد در سال‌های اخیر است.

برای ارزیابی ریسک سبد بهینه‌شده، از انحراف معیار بازده‌های سبد استفاده شد. مقدار انحراف معیار به دست آمده برای بازده سبد بهینه‌شده ۲۰۳.۱۹ درصد است که نشان‌دهنده نوسان بالا در بازده‌های سبد است. این مقدار بالای ریسک می‌تواند به دلیل نوسانات شدید بازار و تغییرات قابل توجه در قیمت سهام باشد. میزان ریسک بالا نشان می‌دهد که سبد بهینه‌شده در برخی سال‌ها، مانند سال ۱۳۹۸ و ۱۴۰۱، بازده‌های بسیار بالا را ایجاد کرده است، اما در عین حال نوسانات زیادی نیز داشته است. این نشان‌دهنده یک استراتژی سرمایه‌گذاری پرریسک است که در برخی مواقع می‌تواند به بازده‌های چشمگیر منجر شود، ولی در برخی دیگر باعث کاهش شدید بازده‌ها خواهد شد.

در راستای بررسی عملکرد سبد بهینه‌شده، علاوه بر محاسبه مستقیم شاخص‌های شارپ و تینرز، ضروری است که عوامل بنیادی و مالی مؤثر بر این شاخص‌ها نیز تحلیل شوند. بدین منظور، از مدل رگرسیون خطی چندمتغیره جهت شناسایی رابطه بین متغیرهای مالی شرکت‌ها و شاخص‌های عملکرد سبد استفاده شد. متغیرهای مستقل مورد بررسی عبارت‌اند از بازده دارایی که نمایانگر توانایی شرکت در تولید سود از کل دارایی‌ها است و بازده حقوق صاحبان سهام که نشان دهنده‌ی میزان سودآوری برای سهامداران شرکت است. همچنین اهرم مالی برابر نسبت بدهی به دارایی و نشان‌دهنده‌ی میزان اتکای شرکت به منابع مالی خارجی و بتا نمایانگر ریسک سیستماتیک شرکت نسبت به بازار و سود خالص که نشان دهنده‌ی سود نهایی شرکت پس از کسر تمام هزینه‌ها است. متغیر وابسته در این تحلیل، عملکرد سبد بهینه بر اساس دو معیار شاخص شارپ و شاخص تینرز است. هدف این است که مشخص شود کدام‌یک از ویژگی‌های مالی شرکت‌ها تأثیر معنادار و قابل توجهی بر بهبود بازده سبد بهینه به ازای واحد ریسک دارند.

جدول ۲ نتایج رگرسیون چندگانه

متغیر	ضریب	سطح معناداری
بازده دارایی	۱۲۰	۰.۰۱
بازده حقوق صاحبان سهام	۱۵.۲	۰.۰۳
اهرم مالی	-۸۵.۷	۰.۰۴۷
بتا	۰.۴	۰.۲
سود خالص	۰.۰۴	۰.۱۲

نتایج رگرسیون چندگانه نشان می‌دهد که بازده دارایی تأثیر مثبت و معناداری بر شاخص شارپ دارد. همچنین، بازده حقوق صاحبان سهام نیز با ضریب ۱۵.۲ بر عملکرد سبد بهینه مؤثر است. در مقابل، اهرم مالی تأثیر منفی و معناداری دارد. این نتایج نشان می‌دهد که شرکت‌هایی با بازده دارایی بالا و اهرم مالی پایین، عملکرد بهتری در سبد بهینه دارند.

شاخص شارپ یکی از مهم‌ترین شاخص‌های ارزیابی عملکرد سبد است که برای مقایسه بازده با ریسک استفاده می‌شود. شاخص تینرز نیز برای ارزیابی عملکرد سبد در مقایسه با بازار استفاده می‌شود. این شاخص از بتای سبد برای اندازه‌گیری حساسیت سبد نسبت به بازار استفاده می‌کند.

جدول ۲ تحلیل تطبیقی نسبت شارپ، تینرز و مارکویتز برای سبد بهینه

شاخص	مقدار سبد بهینه‌شده
شاخص شارپ	۱۹.۹۷۸
شاخص تینرز	۰.۱۳۶
بازده شاخص مارکویتز	۳۰۰.۷۹
ریسک شاخص مارکویتز	۲۰۳.۱۹

جهت ارزیابی دقیق‌تر عملکرد سبد سرمایه‌گذاری بهینه‌شده، از سه معیار کلیدی شامل نسبت شارپ، نسبت ترینر و مدل مارکوویتز بهره‌برداری شده است. این شاخص‌ها، به‌عنوان ابزارهای متداول در مدیریت پرتفوی، امکان تحلیل جامع‌تری از بازده و ریسک را فراهم می‌سازند.

نخست، مقدار شاخص شارپ برای سبد بهینه برابر با ۱۹.۹۷۸ محاسبه گردید. این عدد نشان‌دهنده آن است که سبد مورد نظر به ازای هر واحد ریسک کل (بر حسب انحراف معیار)، توانسته است بازده قابل توجهی ایجاد نماید. از آنجایی که نسبت شارپ بیش از ۱ نشان‌دهنده عملکرد خوب و مقادیر بیش از ۳ بیانگر عملکرد عالی است، عدد ۱۹.۹۷۸ حکایت از کارایی چشمگیر و فوق‌العاده سبد بهینه‌شده دارد.

در ادامه، شاخص ترینر که مبتنی بر ریسک سیستماتیک (بتا) است، برای سبد بهینه‌شده برابر با ۰.۱۳۶ برآورد گردید. این عدد نمایانگر آن است که سبد مورد نظر به ازای هر واحد ریسک بازار، بازده نسبی مثبتی کسب کرده است. هرچند مقدار عددی این نسبت پایین‌تر از مقدار نسبت شارپ است، اما با توجه به ماهیت متفاوت این دو شاخص، این مقدار نیز قابل قبول ارزیابی می‌شود، به‌ویژه زمانی که بازار از نوسانات سیستماتیک بالا برخوردار باشد.

در ارزیابی نهایی و از منظر مدل مارکوویتز، بازده سالانه سبد بهینه‌شده برابر با ۳۰۰.۷۹ درصد محاسبه گردید که بیانگر بازدهی بسیار چشمگیر سرمایه‌گذاری در ترکیب بهینه دارایی‌ها است. این میزان بازده، در کنار ریسک کل معادل ۲۰۳.۱۹ درصد (برحسب انحراف معیار سالانه)، نشان می‌دهد که سبد بهینه‌شده، علیرغم سطح نسبتاً بالای ریسک، توانسته بازده بسیار بالاتری را نسبت به ریسک به‌وجود آورد؛ به‌طوری که نسبت بازده به ریسک نیز این موضوع را به‌خوبی تایید می‌نماید. در مجموع، بررسی این سه شاخص به‌صورت هم‌زمان نشان می‌دهد که سبد سرمایه‌گذاری بهینه‌شده نه تنها از منظر نظریه کلاسیک پرتفوی مارکوویتز مطلوب بوده، بلکه براساس شاخص‌های عملکردی شارپ و ترینر نیز کارایی و اثربخشی بالایی در ایجاد بازده نسبت به ریسک ارائه داده است. این تحلیل می‌تواند به تصمیم‌گیرندگان مالی و سرمایه‌گذاران در انتخاب ساختار سبد سرمایه‌گذاری یاری رساند.

یکی از جنبه‌های مهم تحلیل سبد بهینه‌شده، بررسی حساسیت آن به تغییرات مختلف در بازار است. به طور خاص، اگر شرایط بازار به گونه‌ای تغییر کند که ریسک‌ها افزایش یابند یا بازده‌ها کاهش یابند، سبد بهینه‌شده ممکن است عملکردی متفاوت از آنچه که در این تحقیق مشاهده شد، داشته باشد. با توجه به اینکه سبد بهینه‌شده به شدت تحت تأثیر نوسانات بازار است، سرمایه‌گذاران باید نسبت به تغییرات ناگهانی در شرایط اقتصادی و سیاسی حساس باشند و در نظر بگیرند که این استراتژی ممکن است برای تمامی بازارها مناسب نباشد. برای مثال، در سال ۱۴۰۰ که بازار با کاهش بازده مواجه بود، این استراتژی قادر به حفظ یا افزایش بازده به اندازه کافی نبود. با توجه به نتایج به دست آمده، می‌توان عملکرد سبد بهینه‌شده را با سایر استراتژی‌های سرمایه‌گذاری مانند سبدهای با وزن‌های ثابت یا سبدهای مبتنی بر سایر معیارهای بهینه‌سازی مقایسه کرد. به نظر می‌رسد که سبد بهینه‌شده با استفاده از مدل مارکوویتز در شرایط خاص بازار توانسته است بازده‌های بالاتری نسبت به برخی از استراتژی‌های دیگر ایجاد کند. با این حال، این استراتژی همچنین با ریسک‌های بالا همراه است و ممکن است در شرایطی خاص، مانند بازارهای نوسانی، عملکرد ضعیف‌تری داشته باشد.

منابع:

بیات، علی، و اسدی، لیدا. (۱۳۹۶). بهینه سازی پرتفوی سهام: سودمندی الگوریتم پرندگان و مدل مارکوویتز. مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار (مدیریت پرتفوی)، ۸(۳۲)، ۶۳-۸۵.

پاک مرام، عسگر، بحری ثالث، جمال، و ولی زاده، مصطفی. (۱۳۹۶). انتخاب و بهینه سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک، با بهره گیری از مدل میانگین - نیمه واریانس مارکوویتز. مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار (مدیریت پرتفوی)، ۸(۳۱)، ۱۹-۴۲.

شهرستانی، حمید، ثوابی اصل، فرهاد، و بیدآبادی، بیژن. (۱۳۸۹). تعمیم نظریه مارکوویتز در بهینه سازی سبد سهام. پژوهشنامه اقتصادی، ۱۰(۴) (پیاپی ۳۹)، ۲۰۷-۲۲۹.

مهرآرا، محسن، و صادقیان، صغری. (۱۳۸۷). تعیین ترکیب بهینه وام در بخش های اقتصادی: (مطالعه موردی بانک سامان). اقتصاد مالی (اقتصاد مالی و توسعه)، ۲(۵)، ۸۱-۱۰۲.

پاکیده، کی خسرو، محفوظی، غلامرضا، و علی پورجورشری، ارمغان. (۱۳۹۶). بررسی عملکرد مدل های مارکوویتز و GMD در انتخاب پرتفوی بهینه. کنفرانس بین المللی مدیریت صنعتی.

Askari, K. (n.d.). A Model of Portfolio Optimization using Multivariate GARCH Models; Evidence of Tehran Stock Exchange.

Black, F., Jensen, M. C., & Scholes, M. (1972). The capital asset pricing model: Some empirical tests. *Journal of Finance*, 27(1), 79-121.

Evans, T. (n.d.). Investment Portfolio Optimization with GARCH Models.

Elton, E. J., Gruber, M. J., & Brown, S. J. (2007). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (8th ed.). Wiley.

Fekri, M., & Barazandeh, B. (2019). Designing an Optimal Portfolio for Iran's Stock Market with Genetic Algorithm using Neural Network Prediction of Risk and Return Stocks. arXiv preprint arXiv:1903.06632.

Fama, E. F., & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1), 3-56.

Heibati, F., & Haddadzadeh, R. (2008). Portfolio Optimization Using Markowitz's Mean-Semi Variance Method on Tehran Stock Exchange. *Future Study Management*, 19(76), 39-55.

Ji, R. (2024). Portfolio optimization under the Markowitz model: A comparison in the technology and financial services sectors. Dr. Press. <https://drpress.org/ojs/index.php/HBEM/article/view/16351>

Kolali, S. (2016). Portfolio optimization using Markowitz model: A case study of the Istanbul Stock Exchange. *International Journal of Economics and Business Management*, 3(1), 50-62. <https://iiste.org/Journals/index.php/EJBM/article/view/29452>

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.

Oktavianus Yusan, B., & Riyadi, S. (2024). Portfolio Optimization: Application and Comparison of Markowitz Model and Single Index Model on LQ45 Stocks in Indonesia Stock Exchange. *International Journal of Management Science and Application*, 3(1), 57–85.

Sandhu, M. (n.d.). Portfolio Selection and Optimization through Neural Networks and Markowitz Model: A Case of Pakistan Stock Exchange Listed Companies.

Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119-138.

Treynor, J. L. (1961). Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. *The Journal of Finance*, 16(2), 444-46.

Vico, N., & Samadi, M. (2005). Portfolio optimization using the Markowitz model: Application in the Baku Stock Exchange. World Scientific Publishing.

Yang, L. (2024). Markowitz model optimization: A case study of the automotive and new energy vehicle industries. *SHS Web of Conferences*, 30, 04011.