

تئوری و الگوریتم روش های برنامه ریزی خطی فازی و یک برنامه کامپیوتری

مینوش مرامی

گروه علوم پایه، واحد بهبهان، دانشگاه آزاد اسلامی، بهبهان، ایران

چکیده

نظریه مجموعه‌های فازی در بسیاری از زمینه‌ها از قبیل تحقیق در عملیات، نظریه کنترل، علوم مدیریت و... کاربرد دارد. به ویژه یکی از کاربردهای این نظریه در مسائل تصمیم‌گیری مسائل برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی است. باتوجه به ماهیت داده‌ها که در دنیای واقعی نادقیق و مبهم است، مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی یک ابزار قدرتمند برای مدلسازی مسئله بهینه‌سازی خواهد بود. در این مقاله، با استفاده از مفهوم سنجش اعداد فازی، روش های کارآمدی برای حل این مسائل معرفی کرده و الگوریتم یکی از آنها ارائه شده‌است. در بخش عملی این مقاله به پیاده سازی الگوریتم آن در محیط MATLAB پرداخته و با حل مسائل مختلف و ارائه جدول، کارایی یکی از روش ها (روبنز) مورد بررسی قرار داده شده است.

واژه های کلیدی: برنامه ریزی خطی فازی، سنجش اعداد فازی، تبدیل ملین، روش روبنز

۱. مقدمه:

کاربرد موفقیت آمیز نظریه مجموعه های فازی در سیستم های کنترلی باعث رشد و نفوذ سریع آن در سایر زمینه ها همچون شبیه سازی، هوش مصنوعی، مدیریت، تحقیق در عملیات و بسیاری از شاخه های علوم مهندسی شد. یکی از این زمینه ها برنامه ریزی خطی است. آنجایی که بسیاری از مسایل صنعتی و مدیریتی که منجر به حل یک مساله برنامه ریزی خطی می شود، تصمیم گیرنده نمی تواند به طور دقیق مقادیر ضرایب مساله را تعیین کند و این ابهام ممکن است از نوع احتمالی نباشد. در حقیقت در برنامه ریزی خطی مرسوم عموماً ضرایب مساله تصمیم گیری توسط افراد خبره با مقادیر دقیق تعیین می شوند، ولی در محیط های فازی، فرض وجود اطلاعات دقیق توسط افراد خبره دور از واقعیت به نظر می رسد. بنابراین توسعه و استفاده از مدلسازی فازی در مسایل تصمیم گیری واقعی با داده های نادقیق می تواند مناسب باشد. مفهوم برنامه ریزی ریاضی فازی نخست توسط تاناکا و همکارانش [۱۶] در چارچوب تصمیم گیری فازی ارائه شده توسط بلمن و زاده پیشنهاد شد. نخستین فرمول بندی مساله برنامه ریزی خطی فازی توسط زیمرمن [۲۰] مطرح شد. بعد از آن مدل های مختلفی از مسایل برنامه ریزی خطی فازی معرفی و روش های متعددی برای حل آن پیشنهاد [۴،۵،۷،۱۱،۱۲،۱۴،۱۷] شد.

یک مروری بر ادبیات مرتبط با برنامه ریزی ریاضی فازی بر پایه مقایسه اعداد فازی توسط کلو و یوان [۱۶] و همچنین لای و هوانگ [۱۰] داده شده است. در اکثر این روش ها از مفهوم مقایسه اعداد فازی برای حل این مسایل استفاده می شود [۱۶، ۱۴ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰].

عدم ثبات در پارامترهای مسئله برنامه ریزی خطی که ناشی از عدم قطعیت اطلاعات اولیه در اثر وجود شاخصه هایی همچون تورم در اقتصاد، عدم آگاهی از هزینه های در حال تولید و دیگر پیشامدهایی از این قبیل می باشد، باعث شد که تعریف قطعی مسئله برنامه ریزی خطی در عرصه های گوناگون با تزلزل همراه باشد لذا پس از ارائه نظریه مجموعه های فازی توسط پروفسور «زاده» دانشمند ایرانی اصل دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵ رویکرد جدیدی از دریچه ی فازی ایجاد شد و برخی از طراحان مسئله برنامه ریزی خطی سعی کردند تا عدم قطعیت در پارامترهای این گونه مسائل را با پارامترهای فازی نمایش دهند. یکی از زمینه های تحقیق در تئوری فازی «تصمیم گیری فازی» است که در آن مسائل بهینه سازی را در محیط فازی در نظر می گیرد.

برنامه ریزی ریاضی فازی با توجه به اینکه چگونه پارامترها و اعداد مبهم در مسئله را مدل سازی می کند، به دسته های مختلفی طبقه بندی می شود [۲۱]. بلمن و زاده [۲] مفهوم تصمیم گیری در محیط فازی را معرفی کردند. لای و هوانگ [۱۰]، بوکلی [۳]، دلگادو و همکاران [۵]، ملکی و همکاران [۱۴] وضعیت را که همه پارامترها، ضرایب یا متغیرهای آنها فازی هستند، در نظر گرفتند.

برای حل این مسائل، کمپس و ورجی [۶] لی ولای [۱۵] مفهوم رتبه بندی در محیط فازی را پیشنهاد کردند. رتبه بندی اعداد فازی در کاربرد، بسیار حائز اهمیت است. از آنجایی که اعداد فازی همیشه یک مجموعه کاملاً مرتب شبیه اعداد حقیقی بدست نمی دهند، رتبه بندی اعداد فازی مشکل می نماید. برای رفع این مشکل، بسیاری از مؤلفین روشهای رتبه بندی اعداد فازی را پیشنهاد می کنند که مجموعه کاملاً مرتبی بدست دهند [۱۵ و ۸] از جمله روش های رتبه بندی استفاده از ایده ی تبدیل ملین و روش روبنز است [۱۸ و ۸].

پیشنیازها و تعاریف:

در این بخش بعد از معرفی اجمالی اعداد فازی دوزنقه ای، روشی برای تعیین تابع چگالی احتمال پیوسته با تابع عضویت یک عدد فازی دوزنقه ای پیشنهاد شده تا در بخش بعدی با ایده ی تبدیل ملین، امید تابع چگالی را محاسبه کرده و تقریبی برای رتبه بندی اعداد فازی دوزنقه ای ارائه شود.

تعریف مجموعه فازی:

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد، تابع نشانگر هر زیر مجموعه معمولی A از X یک تابع از X به مجموعه $\{0,1\}$ است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ به بازه $[0,1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که برای x از X ، عددی را از بازه $[0,1]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت مجموعه A می نامیم. اکنون A یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آنرا مجموعه فازی می نامیم (بطور دقیق تر A زیر مجموعه فازی از X است) تابع عضویت این مجموعه را با $M_A(x)$ نشان می دهیم. نزدیکی مقدار $M_A(x)$ به عدد یک نشانگر تعلق بیشتر عضو x به مجموعه A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به A است.

تعریف تکیه گاه مجموعه فازی A:

فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیر مجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $M_A(x) > 0$ ، تکیه گاه A نامیده می شود و با $supp(A)$ نشان داده می شود.

تعریف ارتفاع مجموعه فازی A:

مقدار $M = sup M_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر ۱ باشد آنگاه A را نرمال گوئیم، در غیر این صورت A را زیر نرمال می گوئیم. هر مجموعه فازی زیر نرمال A را می توان با تقسیم $M_A(x)$ ها بر ارتفاع A، نرمال کرد. اگر x عنصری باشد که برای آن $M_A(x) = \frac{1}{2}$ ، x را یک نقطه گذر A گوئیم.

نمایش مجموعه های فازی:

روش متداول برای توصیف یک مجموعه فازی به صورت مجموعه ای از زوجهای مرتب به گونه $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ است. و در صورتیکه X یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) بصورت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد، به شکل زیر نشان داده می شود:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i$$

که در رابطه اخیر منظور از +، اجتماع است نه جمع جبری و هنگامی که X یک مجموعه پیوسته باشد از نماد $A = \int_X \mu_A(x)/x$ استفاده می شود که منظور از $\int$ نیز اجتماع است. تذکر: در بعضی موارد و برای اختصار بجای $M_A(x)$ می نویسیم $A(x)$.

۲-۱- حساب اعداد فازی دوزنقه ای:

فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازی یعنی زیر مجموعه محدب نرمال شده فازی از اعداد حقیقی بطوریکه تابع عضویت آن قطعه قطعه پیوسته باشد یعنی:

$$a) \tilde{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)) \forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1]$$

$$b) \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \tilde{A}(x_0) = 1$$

ج) $\tilde{A}$ قطعه قطعه پیوسته باشد.

یک تابع عموماً با L یا R نشان داده می شود. تابع مرجع یک عدد فازی است اگر و فقط اگر شرایط زیر را دارا باشد:

۱) L تابعی زوج باشد.

۲) L روی $[0, \infty)$ غیر افزایشی باشد.

$$3) L(0) = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0$$

یک نمایش قراردادی اعداد فازی بصورت یک عدد فازی مسطح $L - R$ است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{A^L - x}{\alpha}\right) & x \leq A^L, \alpha > 0 \\ R\left(\frac{x - A^U}{\beta}\right) & x \geq A^U, \beta > 0 \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

که در آن $A^L < A^U$ و $[A^L, A^U]$ هسته $\tilde{A}$ است و برای هر x متعلق به هسته داریم $\tilde{A}(x) = 1$ و A^L و A^U مقادیر مقید بالا و پایین $\tilde{A}$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ را به ترتیب پهنای دست چپ و راست آن می‌نامند.

از جمله انواع مختلف اعداد فازی مسطح $L - R$ اعداد فازی دوزنقه ای (TFN) که به صورت $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ نشان داده می‌شود، بیشترین اهمیت را داراست بطوریکه

$a = A^L - \alpha$ $b = A^L$ $c = A^U$ $d = A^U + \beta$
فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ بعضی از نتایج حساب فازی روی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ بصورت زیر است:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ $x\tilde{A} = (xa_1, xb_1, xc_1, xd_1)$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0$ $x\tilde{A} = (xd_1, xc_1, xb_1, xa_1)$
- 3) $\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$
- 4) $\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, d_1 - d_2)$

از این به بعد فرض می‌کنیم:

$$F(R) = \{\tilde{A} | \tilde{A} = (a, b, c, d) \text{ is a positive TFN with } \alpha > 0\}$$

مفهوم سنجش اعداد فازی براساس موازنه سطوح تعیین شده توسط توابع عضویت آنها بنا شده است (به [۱۱] نگاه کنید). فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ اعداد فازی و $S_L(\tilde{A}, \tilde{B})$ و $S_R(\tilde{A}, \tilde{B})$ سطوح تعیین شده توسط توابع عضویتشان با فرمول های زیر باشد:

$$S_L(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_{L(\tilde{A}, \tilde{B})} (\inf \tilde{A}_\alpha - \inf \tilde{B}_\alpha) d\alpha \quad S_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_{S(\tilde{A}, \tilde{B})} (\sup \tilde{A}_\alpha - \sup \tilde{B}_\alpha) d\alpha$$

که در آن: $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \{\alpha | \sup \tilde{A}_\alpha \geq \sup \tilde{B}_\alpha\}$ و $L(\tilde{A}, \tilde{B}) = \{\alpha | \inf \tilde{A}_\alpha \geq \inf \tilde{B}_\alpha\}$ زیر مجموعه های $[0, 1]$ ، $\varepsilon > 0$ می باشند.

مطابق با روش روبنز برای اینکه $\tilde{A} \geq \tilde{B}$ باشد عدد عبارت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$c(\tilde{A}, \tilde{B}) = S_L(\tilde{A}, \tilde{B}) - S_L(\tilde{B}, \tilde{A}) + S_R(\tilde{A}, \tilde{B}) - S_R(\tilde{B}, \tilde{A})$$

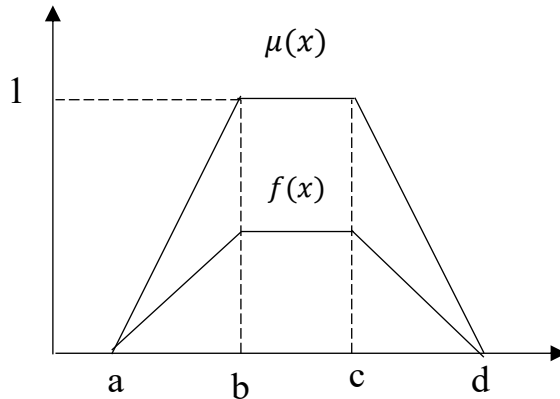
ما فرض می‌کنیم $\tilde{A} \geq \tilde{B}$ هرگاه $C(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0$

۳-۱- تابع چگالی احتمال از تابع عضویت (PDF):

فرض کنید $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ متعلق به $F(R)$ باشد. یکی از روشهایی که بوسیله آن می‌توانیم یک تابع چگالی احتمالی به تابع عضویت $\tilde{A}$ نسبت دهیم، روش ارائه شده در [۹] است. توزیع احتمال متناسب تابع f_1 با فرمول زیر، یک تابع چگالی احتمال مربوط $\tilde{A}$ است. (شکل زیر را ببینید)

$$f_1(x) = c_1 \tilde{A}(x)$$

$$c_1 = \frac{2}{d+c-a-b}$$



تبصره ۱: توجه کنید که c با خاصیت $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 1$ بدست می آید.

۲- مسائل برنامه ریزی خطی اعداد فازی و تبدیل ملین

۲-۱- تبدیل ملین یک TFN

می دانید که به هر تابع چگالی احتمال با تکیه گاه متناهی (اگر f یک فضای توپولوژی باشد و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ آنگاه $f^{-1}(\{0\})$ را تکیه گاه f نامند) امید ریاضی نسبت داده می شود. در این بخش با استفاده از تبدیل ملین [۹] امید ریاضی محاسبه شده است.

تعریف ۱- تبدیل ملین $M_X(s)$ یک تابع چگالی احتمال $f(x)$ ، که X مثبت است، بصورت زیر تعریف می شود:

$$M_X(s) = \int_0^{\infty} X^{s-1} f(x) dx$$

براین اساس امید ریاضی $g(x)$ با متغیر تصادفی X و توزیع $f(x)$ ، از فرمول زیر بدست می آید:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

بنابراین نتیجه می شود که:

$$M_X(s) = E(X^{s-1}) = \int_0^{\infty} X^{s-1} f(x) dx \\ \Rightarrow E(X^s) = M_X(s+1)$$

همچنین امید ریاضی متغیر تصادفی X برابر است با: $E(X) = M(2)$

اگر $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ یک TFN باشد، بنا به ۲-۱- تابع چگالی $f(x)$ متناظر با $\tilde{A}$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$F_{X_A} = \begin{cases} g_1(x) = \frac{2(x-a)}{(d+c-a-b)(b-a)} & a \leq x < b \\ g_2(x) = \frac{2}{d+c-a-b} & b \leq x < c \\ g_3(x) = \frac{2(d-x)}{(d+c-a-b)(b-a)} & c < x \leq d \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

در نتیجه تبدیل ملین بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} M_{X_A}(s) &= \int_0^\infty X^{s-1} F_{X_A}(x) dx = \int_a^b X^{s-1} g_1(x) dx + \\ &\int_b^c X^{s-1} g_2(x) dx + \int_c^d X^{s-1} g_3(x) dx \\ M_{X_A}(s) &= \frac{2}{(d+c-a-b)s(s+1)} \left[\frac{d^{s+1} - c^{s+1}}{d-c} - \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{b-a} \right] \\ E(X_A) &= M_{X_A}(2) = \frac{1}{3} \left[(a+b+c+d) + \frac{ab-dc}{d+c-a-b} \right] \end{aligned}$$

تبصره ۲: جدول تبدیل ملین مربوط به بعضی از اعداد فازی در [۹] ارائه شده است.

۲-۲- رتبه بندی اعداد فازی

یک روش ساده برای مجموعه معمولی $F(R)$ تعریف تابع رتبه بندی $F: F(R) \rightarrow \mathbb{R}$ است که اعداد فازی دوزنقه ای مثبت را به اعداد حقیقی تصویر می کند در صورتی که بطور طبیعی مرتب باشد، در این صورت می توان نوشت:

$$\tilde{A} <_F \tilde{B} \Leftrightarrow F(\tilde{A}) < F(\tilde{B})$$

$$\tilde{A} \leq_F \tilde{B} \Leftrightarrow F(\tilde{A}) \leq F(\tilde{B})$$

$$\tilde{A} =_F \tilde{B} \Leftrightarrow F(\tilde{A}) = F(\tilde{B})$$

در این متن فرض می کنیم که $F, F(\tilde{A}) = E(X_A)$ میانگین تابع رتبه بندی نامیده می شود.

قضیه ۱- اگر $\tilde{A}, \tilde{B} \in F$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$E[\alpha \tilde{A} + \beta \tilde{B}] = \alpha E(\tilde{A}) + \beta E(\tilde{B})$$

اثبات: با توجه به خطی بودن عملگر امید ریاضی اثبات حاصل می شود.

۲-۳- مسائل برنامه ریزی خطی عدد فازی

تعریف ۲- مدل زیر که در آن $\tilde{c}_j, \tilde{b}_i, \tilde{a}_{ij} \in F(R)$ و E میانگین تابع رتبه بندی است، یک مسئله برنامه ریزی خطی عدد فازی نامیده می شود [به [۱۳] نگاه کنید]

$$\begin{cases} \max \tilde{z} = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \\ \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m \tilde{a}_{ij} x_j \leq_E \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.1)$$

تعریف ۳- هر مجموعه از x_j ها که در محدودیتهای (۲.۱) صدق می کند. یک جواب شدنی نامیده می شود. فرض کنید Q مجموعه همه جوابهای شدنی باشد گوییم $X^* \in Q$ یک جواب بهینه برای (۲.۱) است اگر برای همه $X \in Q$ داشته باشیم: $CX^* \geq_E \tilde{C}X$ قضیه زیر نشان می دهد که می توانیم مسئله (۲.۱) را به یک مسئله برنامه ریزی خطی کلاسیک تقلیل دهیم.

قضیه ۲- مدل (۲.۱) و مسئله زیر معادل یکدیگرند:

$$\begin{cases} \max \tilde{z} = \sum_{j=1}^n E[\tilde{c}_j] x_j \\ \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m E[\tilde{a}_{ij}] x_j \leq E[\tilde{b}_i] \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.2)$$

تبصره ۳: قضیه (۲) حتی اگر x_j ها نامحدود باشند، برقرار است.

۳- مسائل برنامه ریزی خطی عدد فازی و روش روبنز
در این بخش مسئله برنامه ریزی خطی عدد فازی را معرفی کرده و روش روبنز برای حل مسئله پیشنهاد می کنیم.

۳-۱- تعریف تابع رتبه بندی روبنز:

تابع رتبه بندی پیشنهادی توسط روبنز با فرمول زیر تعریف می شود:

$$R(\tilde{a}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\inf \tilde{a}_\alpha + \sup \tilde{a}_\alpha) d\alpha \quad (1)$$

که در آن $\tilde{a}_\alpha$ یک مجموعه $-\alpha$ سطح از $\tilde{a}$ است. فرمول (۱) برای یک عدد فازی دوزنقه ای $A = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ بصورت زیر تبدیل می شود:

$$R(\tilde{a}) = \frac{1}{2} \left[a^L + a^U + \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \right]$$

هم چنین با فرض $\tilde{a}$ بصورت فوق میانگین تابع چگالی که بصورت زیر تعریف می شود. یک تابع رتبه بندی است:

$$E(X_{\tilde{a}}) = \frac{1}{3} \left[2(a^L + a^U) + (\beta - \alpha) + \frac{a^L(a^L - \alpha) - a^U(a^U + \beta)}{2(a^U - a^L) + (\beta + \alpha)} \right]$$

لم ۱- فرض کنید R تابع رتبه بندی خطی دلخواهی باشد در این صورت:

$$I) \tilde{a} \geq_R \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{a} - \tilde{b} \geq_R 0 \Leftrightarrow -\tilde{b} \geq_R -\tilde{a}$$

$$II) \text{ if } \tilde{a} \geq_R \tilde{b} \text{ and } \tilde{c} \geq_R \tilde{d} \Rightarrow \tilde{a} + \tilde{c} \geq_R \tilde{b} + \tilde{d}$$

تعریف ۳-۲- مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \max \tilde{Z} = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \\ \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m \tilde{a}_{ij} x_j \leq_R \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

که در آن $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}_j \in F(R)$ این مسئله را یک مسئله برنامه ریزی خطی عدد فازی (FNLPP) می نامند. (به [۱] نگاه کنید)

ما از این به بعد، عدد حقیقی f را متناظر با عدد فازی دوزنقه ای $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ گوئیم

$$\text{اگر } f = a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

تعریف ۳-۳- فرض کنید $F(R)$ مجموعه اعداد فازی باشد. مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \max \tilde{Z} = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, m_0 \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \geq \tilde{b}_i \quad i = m_0 + 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

که در آن $\tilde{c}_j = (c_j^l, c_j^u, w_j, \eta_j)$ متعلق به $F(R)$ یک مدل برنامه ریزی خطی عدد فازی نامیده می شود.

تعریف ۳-۴- هر مجموعه از x_j ها که در مجموعه شرایط (۳.۱) صدق کند یک جواب شدنی برای (۳.۱) نامیده می شود. فرض کنید Q مجموعه همه جواب های شدنی (۳.۱) باشد $X^* \in Q$ را یک جواب بهینه شدنی (۳.۱) نامیم هرگاه $\tilde{C}X^* \geq \tilde{C}X$ برای همه $X \in Q$

لم زیر نشان می دهد که می توانیم مسئله (۳.۱) را به مسئله ای در فرم کلاسیک تقلیل دهیم.

لم ۳-۱- مسئله (۳.۱) و مسئله زیر معادل اند:

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s. t. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m_0 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & i = m_0 + 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.2)$$

برای اثبات به [۱] نگاه کنید.

تبصره ۱-۲- هم ارزی دو مسئله فوق حتی اگر x_j ها نامحدود باشند نیز برقرار است.

۴- برنامه ریزی خطی با متغیرهای فازی

در این بخش روشی برای حل مسئله برنامه ریزی خطی با متغیرهای فازی را بیان می کنیم. در ابتدا، مسئله را تعریف کرده و مسئله دیگری را تعریف می کنیم که مسئله کمکی نامیده می شود. سپس ارتباط بین این دو مسئله را بررسی کرده و با استفاده از این روابط، یک جواب بهینه برای مسئله مورد بحث بدست می آوریم.

تعریف ۴-۱- مسئله زیر را مسئله برنامه ریزی خطی با متغیرهای فازی می نامند.

$$\begin{cases} \min \tilde{Z} = b' \tilde{y} \\ s. t. \quad \tilde{y} A \geq c' \\ \tilde{y} \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

where $\tilde{y} \in (F(R))^m, \tilde{c}' \in (F(R))^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, 0 \leq b \in \mathbb{R}^m$

$\tilde{y}$ را یک جواب شدنی فازی (۴.۱) می نامند اگر فقط اگر $\tilde{y}$ در شرایط مسئله صدق کند. $\tilde{y}^*$ را یک جواب فازی بهینه می نامند هرگاه برای همه $\tilde{y}$ در مجموعه جوابهای شدنی فازی (۴.۱) داشته باشیم.

تعریف ۴-۲- مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \max Z = \tilde{c}x \\ s. t. \quad Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

که در آن $b \in \mathbb{R}^m$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $X \in \mathbb{R}^n$ و $\tilde{c} \in (F(R))^n$ مسئله کمکی (۴.۱) نامیده می شود.

به منظور حل مسئله (۴.۱) می توان از جواب بهینه (۴.۲) استفاده کرد. همچنین (۴.۲) در واقع یک مسئله برنامه ریزی خطی عدد فازی است که قبلاً روش حل آنرا بیان کردیم. در ادامه روابط بین مسائل اولیه و کمکی را بررسی می کنیم.

لم ۴-۱- اگر $\tilde{Y}$ جواب شدنی فازی دلخواه (۴.۱) و X جواب شدنی دلخواه (۴.۲) باشد آنگاه $\tilde{c}X \leq b'\tilde{Y}$

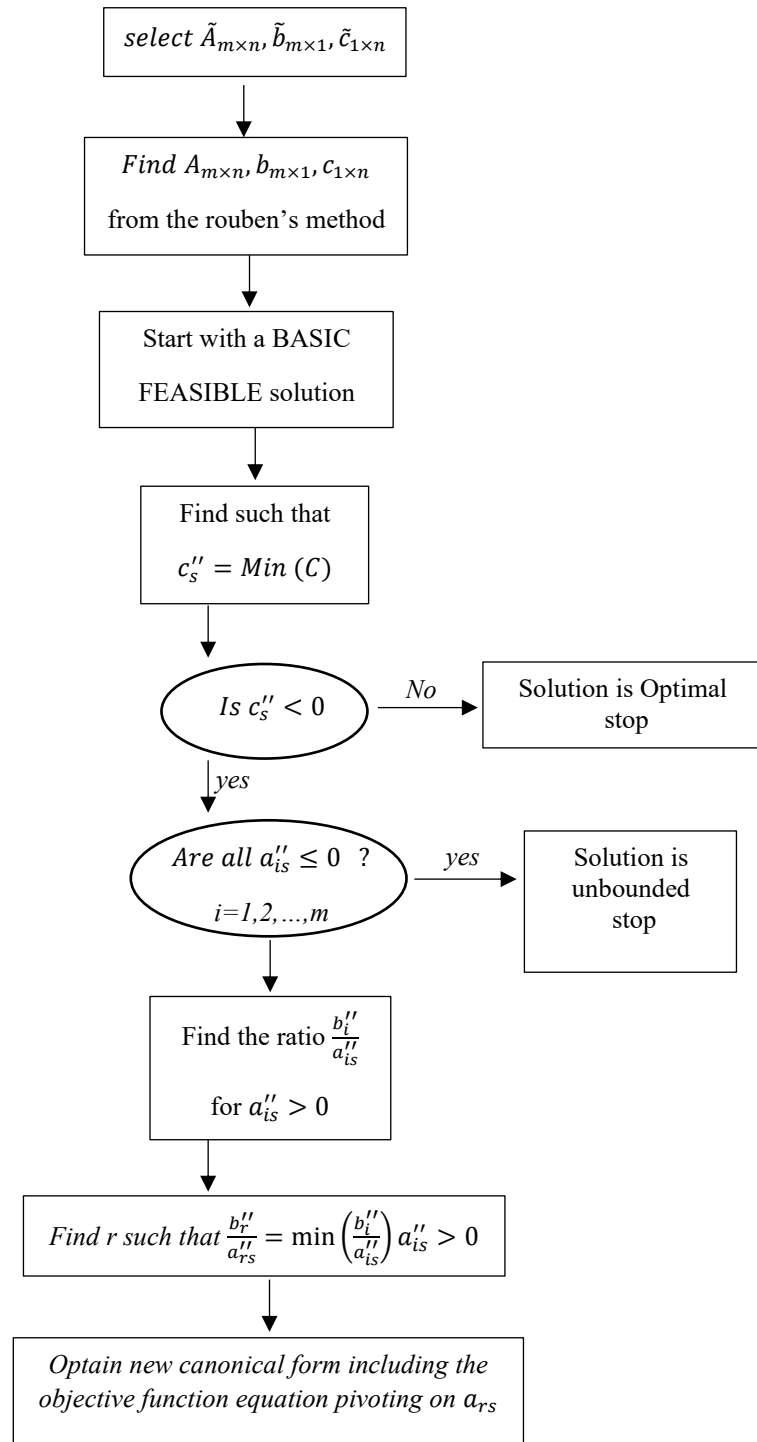
لم ۴-۲- اگر $\tilde{y}^*$ یک جواب شدنی فازی برای (۴.۱) و X^* یک جواب شدنی برای (۴.۲) باشند بطوریکه $\tilde{c}X = b'\tilde{y}^*$ آنگاه X^* یک جواب بهینه برای (۴.۲) و $\tilde{y}^*$ یک جواب بهینه فازی برای (۴.۱) است.

قضیه ۳-۱- اگر مسئله کمکی (۴.۲) یک جواب بهینه داشته باشد آنگاه مسئله (۴.۱) نیز یک جواب فازی دارد. (برای اثبات به [۱] نگاه کنید)

لم ۴-۳- اگر مسئله (۴.۲) یک جواب بی کران داشته باشد آنگاه مسئله (۴.۱) هیچ جواب شدنی فازی ندارد.

نتیجه: بنابراین نتیجه می گیریم که برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی با متغیرهای فازی کفایت مسئله کمکی آنرا با استفاده از روش بخش ۲ یا ۳ حل کرده و نهایتاً با استفاده از قضایای این بخش جواب بهینه فازی را محاسبه کنیم.

فلوچارت الگوریتم RFN (رتبه بندی اعداد فازی با روش روبنز)



۵- حل چند مسئله با برنامه کامپیوتری و جدول نتایج

در این بخش نتایج حاصل از حل چند مسئله با استفاده از برنامه کامپیوتری روش روبنز برای FNLPM که در محیط MATLAB اجرا شده است را ارائه می‌کنیم. (برنامه کامپیوتری را در [۱۳] ببینید).

مسئله و جدول ۱:

$$\begin{cases} \text{Max } Z = (2,3,1,1)x_1 + (3,4,1,2)x_2 \\ \text{s. t.} & (1,2,1,1)x_1 + (2,3,1,2)x_2 \leq (5,6,2,2) \\ & (2,3,1,3)x_1 + (1,2,1,1)x_2 \leq (4,6,2,1) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

این مسئله به مسئله کلاسیک زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 5x_1 + 7/5x_2 \\ \text{s. t.} & 3x_1 + 5/5x_2 \leq 11 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 9/5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

این مسئله بعد از دو تکرار به جواب بهینه می‌رسد: (جدول آغازین و پایانی بصورت زیر است)

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	۳	۵/۵	۱	۰	۱۱
s_2	۶	۳	۰	۱	۹/۵
Z	-۵	-۷/۵	۰	۰	۰

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_2	۰	۱	۰/۲۵	-۰/۱۲۵	۱/۵۶۲۵
x_1	۱	۰	-۰/۱۲۵	۰/۲۲۹۲	۰/۸۰۲۱
Z	۰	۰	۱/۲۵	۰/۲۰۸۳	۱۵/۷۲۹۲

مسئله و جدول ۲:

$$\begin{cases} \text{Max } Z = (6,4,2,1)x_1 + (3,2,1,2)x_2 + (4/5,3,2)x_3 \\ \text{s. t.} & (4,5,3,2)x_1 + (3,1,2,3)x_2 + (7,11,5,32)x_3 \leq (14,10,9,6) \\ & (3,2,7,1)x_1 + (2,5,1,1)x_2 \leq (12,19,2,7)x_3 \geq (7,8,6,4) \\ & (19,11,4,3)x_1 + (6,7,1,2)x_2 + (8,9,5,2)x_3 \geq (11,10,6,2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

این مسئله به مسئله کلاسیک زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \text{Max} Z = 9/5x_1 + 5/5x_2 + 8/5x_3 \\ \text{s. t.} & 8x_1 + 4/5x_2 + 17x_3 \leq 22/5 \\ & 2x_1 + 7x_2 + 33/5x_3 \geq 14 \\ & 29/5x_1 + 13/5x_2 + 15/5x_3 \geq 19 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

این مسئله بعد از چهار تکرار به جواب بهینه می‌رسد: (جداول آغازین و پایانی به صورت زیر است)

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	b
s_1	۸	۴/۵	۱۷	۱	۰	۰	۰	۰	۲۲/۵
R_1	۲	۷	۳۳/۵	۰	-۱	۰	۱	۰	۱۴
R_2	۲۹/۵	۱۳/۵	۱۵/۵	۰	۰	-۱	۰	۱	۱۹
Z	-۳/۵۰۹	-۲۰۵۰۵	-۴۹۰۰۰۹	۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۰	۰	-۳۳۰۰۰

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	b
s_1	۴/۳۴۵۸	۰	۰	۱	۰/۴۶۴۷	۰/۰۹۲۴	۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۱	۱۴/۲۳۸
x_3	-۰/۵۲۲۲	۰	۱	۰	-۰/۰۳۹۳	۰/۰۲۰۴	۰/۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰	۰/۱۶۲
x_2	۲۹/۵	۱	۰	۰	۰/۰۴۵	۰/۹۷۵	-۰/۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰	۱/۲۲۰
Z	۱/۳۷۷۵	۰	۰	۰	-۰/۰۸۵۸	-۰/۳۶۲۹	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۴	۸/۰۹۶

۶- نتیجه گیری

کاربرد موفقیت آمیز نظریه مجموعه های فازی در سیستم های کنترلی باعث رشد و نفوذ سریع آن در سایر زمینه ها همچون شبیه سازی هوش مصنوعی مدیریت تحقیق در عملیات و بسیاری از شاخه های علوم مهندسی شد. یکی از این زمینه ها برنامه ریزی خطی است. آنجایی که بسیاری از مسایل صنعتی و مدیریتی که منجر به حل یک مساله برنامه ریزی خطی میشود تصمیم گیرنده نمی تواند به طور دقیق مقادیر ضرایب مساله را تعیین کند و این ابهام ممکن است از نوع احتمالی نباشد. در حقیقت در برنامه ریزی خطی مرسوم عموماً ضرایب مساله تصمیم گیری توسط افراد خبره با مقادیر دقیق تعیین میشوند ولی در محیطهای فازی، فرض وجود اطلاعات دقیق توسط افراد خبره دور از واقعیت به نظر می‌رسد. بنابراین توسعه و استفاده از مدلسازی فازی در مسایل تصمیم گیری واقعی با داده های نادقیق می تواند مناسب باشد. در این مقاله با استفاده از مفهوم سنجش اعداد فازی، روش هایی برای حل مسائل معرفی گردید و الگوریتم یکی از آنها با نرم افزار متلب ارائه شد، سپس با حل مسائل مختلف و ارائه جدول، کارایی یکی از روش روبنز مورد بررسی قرار گرفت که بسیار کارآمد بود.

- [1] F.F Baldwin, N.C.F. Guild, comparison of fuzzy sets on the same decision space, fuzzy sets and systems (1979) 213-231.
- [2] R.E. Bellman, L.A. zadeh, Decision making in a fuzzy environmen, management sci. 17 (1970) 141-164.
- [3] J.J Buckley, possibilistis linear programming with traingular fuzzy numbers, fuzzy sets and systems 31 (1989) 329-341.
- [4] L. Campos and J.L. Verdegay, "Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers", Fuzzy Sets and Systems 32 (1989) 1-11.
- [5] M.Delgado, J.L.Verdegay and M.A.Vila, A general model for fuzzy linear programming, fuzzy sets and system,29 (1989), 1-12.
- [6]L. Compos and J.L. verdegay, Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers, fuzzy sets and systems, 32 (1989), 21-29.
- [7] S.C. Fang and C.F. Hu, "Linear programming with fuzzy coefficients in constraint", Comput. Math. Appl. 37 (1999) 63-76.
- [8] P.fortmps, M. Roubens, Ranking and defuzzification methods based on area compensation fuzzy sets systems 82(1996) , 319- 330.
- [9] G.J. Klir and B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice-Hall, PTR, New Jersey, 1995.
- [10] Y.J. Lai, col. Hwang, tuzzy mathematical programming methods and applications, springer, Berlin, 1992.
- [11] N. Mahdavi-Amiri and S.H. Nasseri, "Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function", Applied Mathematics and Computation 180 (2006) 206-216.
- [12] N. Mahdavi-Amiri and S.H. Nasseri, "Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables", Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1961-1978.
- [13] M.Marami, Theory and algorithm of fuzzy linear programming methods and a computer program, a research project has been implemented Islamic Azad University Behbahan branch (2004).
- [14] H.R Maleki, M.Tata and M.Mashinchi, linear programming with fuzzy variables, fuzzy sets and systems 109 (2000), 21-33.
- [15] E.S. lee and R.J.Li, cornparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events, comput. Math. Apple, 15 (1988), 887-896.
- [16] H. Tanaka, T. Okuda and K. Asai, "On fuzzy mathematical programming", The Journal of Cybernetics 3 (1974) 37-46.
- [17] J.L. Verdegay, "A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem", Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 131-141.
- [18] k.p. yoon, A prodalic approach to rank complex fuzzy numbers, fuzzy.

- [19] E. yazdany, H.R. Maleki and M.Mashinchi, A methad for solving a fuzzy linear programming korean J. comput & Apple. Math vol 8(2001), No. 2, PP.347-356.
- [20] H. J. Zimmermann, "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions", Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 45-55.

[۲۱] س. ع. ترابی، س. توفیقی (۱۳۹۴). برنامه ریزی ریاضی فازی. انتشارات دانشگاه تهران. چاپ چهارم.