

چند جمله ای های متعامد و نقش آنها در درجه بندی گاوسی: وجود، یکتایی، خواص بنیادی و صفرها

حسین حسینی^۱، محمد مهدی پور زرین کمر^۲، مهسا کعبه^۳

۱- دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران (hosn.hosni.1379@gmail.com)

۲- دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران (mohamad.mehdipor1404@gmail.com)

۳- دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران (mahsa_kabe@mathdep.iust.ac.ir)

چکیده

چندجمله ای های متعامد یکی از مهم ترین ابزارهای ریاضیات کاربردی و آنالیز عددی هستند که به دلیل ساختار ویژه و خواص نظری ارزشمند خود، نقش اساسی در تقریب توابع، حل معادلات دیفرانسیل و فرمول های انتگرال گیری عددی ایفا می کنند. در این مقاله، برخی از مهم ترین ویژگی های نظری چندجمله ای های متعامد مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا وجود و یکتایی خانواده های چندجمله ای های متعامد نسبت به یک تابع وزن مثبت و رابطه بازگشتی سه جمله ای آن ها مطالعه می شود. سپس خواص بنیادی مرتبط با هسته کریستوفل-داربو و نتایج حاصل از آن ارائه می گردد. در ادامه، صفرهای چندجمله ای های متعامد و ویژگی های مهم آن ها از جمله حقیقی و ساده بودن صفرها، جداسازی صفرهای متوالی و روش های محاسبه آن ها بررسی می شود. همچنین ارتباط میان چندجمله ای های متعامد و فرمول های درجه بندی نوع گاوس تشریح شده و فرمول های گاوس، گاوس-رادو و گاوس-لوباتو از دیدگاه نظری مورد مطالعه قرار می گیرند. در پایان، خانواده های مشهور چندجمله ای های ژاکوبی، لژاندر و چبیشف معرفی شده و برخی از خواص اساسی آن ها بیان می شود. نتایج این پژوهش نشان می دهد که چندجمله ای های متعامد چارچوبی منسجم برای توسعه روش های تقریب و انتگرال گیری عددی فراهم می کنند و از جایگاه ویژه ای در مباحث نظری و کاربردی ریاضیات برخوردارند.

کلمات کلیدی: چندجمله ای های متعامد، رابطه بازگشتی سه جمله ای، صفرهای چندجمله ای های متعامد، درجه بندی گاوسی، گاوس-رادو، گاوس-لوباتو

۱- مقدمه

روش طیفی فوریه فقط برای مسائل با شرایط مرزی تناوبی مناسب است. اگر روش فوریه برای یک مسئله غیرتناوبی اعمال شود، پدیده گیس نامیده می شود و نرخ همگرایی جهانی را به $O(N^{-1})$ کاهش می دهد. در نتیجه نباید از روش فوریه برای

مسائل با شرایط مرزی غیرتناوبی استفاده کرد و باید از چندجمله ای های متعامد استفاده کرد که توابع ویژه برخی مسائل منفرد هستند.

چندجمله ای های متعامد شامل چند جمله ای های لژاندر، چبیشف، ژاکوبی، هرمیت و لاگر می باشد. چندجمله ای های متعامد نوعی از چندجمله ایها هستند که خواص جالبی دارند و در ریاضیات به خصوص آنالیز، آنالیز عددی و معادلات دیفرانسیل کاربردهای فراوانی دارند [۲-۳۸].

۲- چندجمله ای های متعامد

چندجمله ای متعامد مهمترین نقش را در روش طیفی ایجاد می کند، بنابراین بررسی دقیق خواص مربوط به آنها ضروری است که در ادامه به بررسی خواص آنها و ویژگی های مربوط به آنها می پردازیم [۲].

۲-۱- وجود ویگانگی

تعریف ۱. باتوجه به یک بازه باز $I = (a, b)$ که در آن $-\infty \leq a < b \leq \infty$ و یک تابع وزن ω به طوریکه :

$$\omega(x) > 0, \forall x \in I \quad (۱)$$

$$\omega \in L^1(I) \quad (۲)$$

متعامد نسبت به دو تابع f و g در $L^2_\omega(a, b)$ گفته می شود اگر:

$$(f, g)_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx = 0. \quad (1)$$

یک چندجمله ای از درجه n به صورت زیر نشان داده می شود :

$$p_n(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0, \quad k_n \neq 0$$

که در آن $\{k_i\}$ ثابت های حقیقی هستند و k_n ضریب اصلی p_n هستند. دنباله ای از چندجمله ای های $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ که در آن درجه p_n برابر با n است، متعامد در $L^2_\omega(a, b)$ گفته می شود اگر [۲] :

$$(p_n, p_m)_\omega = \int_a^b p_n(x)p_m(x)\omega(x)dx = \gamma_n \delta_{mn}$$

که در آن $\gamma_n = \|p_n\|_\omega^2$ غیر صفر و δ_{mn} تابع دلتا کرونکر است و به صورت زیر تعریف می گردد [۸] :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

در سراسر این بخش $\{p_n\}$ نشان دهنده دنباله ای از چندجمله ای های متعامد باتوجه به تابع وزنی ω است.

و p_n از درجه n است. و مجموعه همه چندجمله ای های جبری با درجه کوچکتر یا مساوی n را با p_n نشان می دهیم. یعنی :

$$p_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

که با استدلال داریم :

$$p_n = \text{span}\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

و لم زیراداریم.

لم ۱. برای هر چند جمله $q \in P_n$ ، p_{n+1} متعامد است.

برهان. برای هر $q \in P_n$ ، می توانیم بنویسیم :

$$q = b_n p_n + b_{n-1} p_{n-1} + \dots + b_0 p_0$$

از این رو

$$(p_{n+1}, q)_\omega = b_n (p_{n+1}, p_n)_\omega + b_{n-1} (p_{n+1}, p_{n-1})_\omega + \dots + b_0 (p_{n+1}, p_0)_\omega = 0$$

□

که در آن از خاصیت متعامد بودن استفاده شده است.

تعریف ۲. چند جمله ای تک نرمال $\bar{p}_n$ متناظر با p_n به صورت زیر تعریف می شود :

$$\bar{p}_n(x) = p_n(x)/k_n = x^n + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \dots + a_0^{(n)} \quad (2)$$

در اینجا نشان داده می شود که برای هر تابع وزن مثبت $\omega(x)$ که در بازه (a, b) تعریف شده است، یک خانواده یکتا از چند جمله ای های متعامد تک نرمال وجود دارد که با یک رابطه بازگشتی سه جمله ای ساخته می شوند.

قضیه ۱. برای هر تابع وزن مثبت $\omega \in L^1(I)$ ، دنباله یکتای چند جمله ای متعامد یکه $\{\bar{p}_n\}$ که در آن $\deg(\bar{p}_n) = n$ وجود دارد که به صورت زیر ساخته می شود :

$$\bar{p}_0 = 1, \quad \bar{p}_1 = x - \alpha_0,$$

$$\bar{p}_{n+1} = (x - \alpha_n) \bar{p}_n - \beta_n \bar{p}_{n-1}, \quad n \geq 1$$

به طوری که :

$$\alpha_n = \frac{(x \bar{p}_n, \bar{p}_n)_\omega}{\|\bar{p}_n\|_\omega^2}, \quad n \geq 0$$

$$\beta_n = \frac{\|\bar{p}_n\|_\omega^2}{\|\bar{p}_{n-1}\|_\omega^2}, \quad n \geq 1$$

برهان. واضح است که دو چند جمله ای اول برابرند با :

$$\bar{p}_0(x) \equiv 1, \quad \bar{p}_1(x) = x - \alpha_0$$

برای تعیین α_0 ، می بینیم که $(\bar{p}_0, \bar{p}_1)_\omega = 0$ تنها زمانی برقرار است :

$$\alpha_0 = \int_a^b \omega(x) x dx / \int_a^b \omega(x) dx = \frac{(x \bar{p}_0, \bar{p}_0)_\omega}{\|\bar{p}_0\|_\omega^2}$$

که در آن مخرج کسر، به دلیل خاصیت تابع وزن همواره مثبت است. ما با استفاده از یک استدلال استقرا به برهان ادامه می

دهیم. با فرض اینکه با استفاده از ساختاری مشابه، دنباله ای از چندجمله ای متعامد $\{\bar{p}_k\}_{k=0}^n$ را به دست آوردیم. بعد، ما به دنبال $\bar{p}_{n+1}$ به فرم زیر هستیم :

$$\bar{p}_{n+1} = x\bar{p}_n - \alpha_n\bar{p}_n - \beta_n\bar{p}_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \gamma_k^{(n)} \bar{p}_k$$

اکنون :

$$(\bar{p}_{n+1}, \bar{p}_k)_\omega = 0, \quad 0 \leq k \leq n$$

با گرفتن حاصل ضرب داخلی $\bar{p}_k$ در دو طرف معادله و با استفاده از خاصیت متعامد بودن بودن دنباله $\{\bar{p}_k\}_{k=0}^n$ ، نتیجه می گیریم که این شرط زمانی برقرار است که :

$$\begin{aligned} (\bar{p}_{n+1}, \bar{p}_n)_\omega &= (x\bar{p}_n, \bar{p}_n)_\omega - \alpha_n(\bar{p}_n, \bar{p}_n)_\omega = 0 \\ (\bar{p}_{n+1}, \bar{p}_{n-1})_\omega &= (x\bar{p}_n, \bar{p}_{n-1})_\omega - \beta_n(\bar{p}_{n-1}, \bar{p}_{n-1})_\omega = 0 \\ (\bar{p}_{n+1}, \bar{p}_j)_\omega &= (x\bar{p}_n, \bar{p}_j)_\omega - \sum_{k=0}^{n-2} \gamma_k^{(n)} (\bar{p}_k, \bar{p}_j)_\omega \end{aligned}$$

$$= (x\bar{p}_n, \bar{p}_j)_\omega - \gamma_j^{(n)} \|\bar{p}_j\|_\omega^2 = 0, \quad 0 \leq j \leq n-2$$

براساس برابری دوم می توان نوشت :

$$\beta_n = \frac{(x\bar{p}_n, \bar{p}_{n-1})_\omega}{\|\bar{p}_{n-1}\|_\omega^2} = \frac{(\bar{p}_n, x\bar{p}_{n-1})_\omega}{\|\bar{p}_{n-1}\|_\omega^2} = \frac{\|\bar{p}_n\|_\omega^2}{\|\bar{p}_{n-1}\|_\omega^2}$$

در اینجا از این واقعیت استفاده شده است که :

$$x\bar{p}_{n-1} = \bar{p}_n + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k^{(n)} \bar{p}_k$$

و با استفاده از خاصیت متعامد بودن دنباله $\{\bar{p}_k\}_{k=0}^n$ ، نتیجه آخر را استخراج کردیم. حال باید نشان دهیم که ضرایب

$\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-2}$ همگی برابر با صفر هستند. برای این کار از لم (۱) نتیجه می گیریم که :

$$(x\bar{p}_n, \bar{p}_j)_\omega = (\bar{p}_n, x\bar{p}_j)_\omega = 0, \quad 0 \leq j \leq n-2$$

این امر نشان می دهد که :

$$\gamma_k^{(n)} \equiv 0, \quad 0 \leq k \leq n-2$$

در نتیجه، استقرا کامل می شود. حال یکتایی را نشان می دهیم. برای این منظور، فرض می کنیم که $\{\bar{q}_n\}_{n=0}^\infty$ دنباله دیگر از چندجمله ای های متعامد تک نرمال باشد.

اکنون داریم:

$$\deg(\bar{p}_{n+1} - \bar{q}_{n+1}) \leq n$$

با استفاده از لم (۱) داریم:

$$(\bar{p}_{n+1}, \bar{p}_{n+1} - \bar{q}_{n+1})_{\omega} = 0, \quad (\bar{q}_{n+1}, \bar{p}_{n+1} - \bar{q}_{n+1})_{\omega} = 0$$

که به این نتیجه می رسد:

$$(\bar{p}_{n+1} - \bar{q}_{n+1}, \bar{p}_{n+1} - \bar{q}_{n+1})_{\omega} = 0 \Rightarrow \bar{p}_{n+1}(x) - \bar{q}_{n+1}(x) \equiv 0$$

□

در نتیجه، یکتایی ثابت می شود.

قضیه فوق یک رابطه بازگشتی سه جمله ای کلی برای ساخت چندجمله ای های متعامد ارائه می دهد [۴]. مقادیر α_n و β_n را می توان برای خانواده های متداول به طور صریح محاسبه کرد.

رابطه بازگشتی سه جمله ای یکی از بنیادی ترین نتایج نظریه چندجمله ای های متعامد است. اهمیت این رابطه در آن است که هر عضو از خانواده چندجمله ای های متعامد را می توان تنها با استفاده از دو عضو قبلی تولید کرد. این ویژگی نقش مهمی در تحلیل نظری و محاسبات عددی این چندجمله ای ها دارد.

نتیجه ۱. فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنباله از چندجمله ای های متعامد با ضریب پیشرو $k_n \neq 0$ باشد. آنگاه داریم:

$$p_{n+1} = (a_n x - b_n) p_n - c_n p_{n-1}, \quad n \geq 0$$

با شرط اولیه $p_0 = k_0$ و $p_{-1} = 0$.

ضرایب در این رابطه به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}$$

$$b_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{(x p_n, p_n)_{\omega}}{\|p_n\|_{\omega}^2}$$

$$c_n = \frac{k_{n-1} k_{n+1}}{k_n^2} \frac{\|p_n\|_{\omega}^2}{\|p_{n-1}\|_{\omega}^2}$$

چندجمله ای های متعامد $\{p_n\}$ که ضرایب پیشرو آنها $\{k_n\}$ هستند، به صورت یکتا با استفاده از روابط بازگشتی تعیین می شوند.

نتیجه ۲. فرض کنید $\{k_n \neq 0\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد. روابط بازگشتی سه جمله ای یک دنباله از چندجمله ای ها تولید می کند که خصوصیات زیر را دارند:

(۱) ضریب پیشرو p_n برابر با k_n است و $\deg(p_n) = n$.

(۲) چندجمله ای های $\{p_n\}$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامد هستند.

(۳) نرم L_{ω}^2 از p_n به صورت زیر داده می شود:

$$\gamma_n = \|p_n\|_\omega^2 = (a_0/a_n)c_1c_2 \dots c_n\gamma_0, \quad n \geq 0$$

که در آن:

$$\gamma_0 = k_0^2 \int_a^b \omega(x) dx$$

نتیجه ۳. فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنباله از چند جمله ای های متعامد با $\deg(p_n) = n$ باشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} = \frac{k_{n+1}}{k_n} \sum_{j=0}^n \frac{\|p_n\|_\omega^2}{\|p_j\|_\omega^2} p_j(x)p_j(y)$$

و همچنین :

$$p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x) = \frac{k_{n+1}}{k_n} \sum_{j=0}^n \frac{\|p_n\|_\omega^2}{\|p_j\|_\omega^2} p_j^2(x)$$

تعریف ۳. هسته $K_n(x, y)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم [۲] :

$$K_n(x, y) = \sum_{j=0}^n \frac{p_j(x)p_j(y)}{\|p_j\|_\omega^2} \quad (3)$$

فرمول کریستوفل - داربو را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$K_n(x, y) = \frac{k_n}{k_{n+1}\|p_n\|_\omega^2} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} \quad (4)$$

هسته کریستوفل-داربو ابزاری مهم در مطالعه تقریب توابع و تحلیل همگرایی سری های متعامد است و در بسیاری از مسائل

تقریب طیفی و نظریه بازتولیدکننده ها مورد استفاده قرار می گیرد.

یک خاصیت قابل توجه از $\{K_n\}$ در لِم زیر بیان شده است :

لِم ۲. معادله انتگرالی زیر برقرار است :

$$q(x) = \int_a^b q(t) K_n(x, t) \omega(t) dt, \quad \forall q \in P_n$$

علاوه براین، دنباله چند جمله ای های $\{K_n(x, a)\}$ و همچنین $\{K_n(x, b)\}$ به ترتیب نسبت به تابع وزن $\omega(x-a)$ و

$\omega(b-x)$ متعامد هستند.

برهان. برای هر $q \in P_n$ می توان نوشت :

$$q(x) = \sum_{j=0}^n \hat{q}_j p_j(x)$$

که در آن :

$$q_j = \frac{1}{\|p_j\|_\omega^2} \int_a^b q(t) p_j(t) \omega(t) dt$$

بنابراین با استفاده از تعریف رابطه نتیجه می گیریم که :

$$q(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\|p_j\|_\omega^2} \int_a^b q(t) p_j(x) p_j(t) \omega(t) dt = \int_a^b q(t) K_n(x, t) \omega(t) dt$$

حال ، با انتخاب $x = a$ و برای هر $r \in P_{n-1}$ در $q(t) = (t-a)r(t)$ نتیجه می گیریم :

$$0 = q(a) = \int_a^b K_n(t, a) r(t) (t-a) \omega(t) dt, \quad \forall r \in P_{n-1}$$

این رابطه نشان می دهد $\{K_n(x, a)\}$ نسبت به $\omega(x-a)$ متعامد است. به طور مشابه اگر $b = x$ قرار دهیم و برای هر $r \in P_{n-1}$ در $q(t) = (b-t)r(t)$ ، می توان نشان داد که $\{K_n(x, b)\}$ نسبت به $\omega(b-x)$ متعامد است. $\square$

۳- صفرهای چندجمله ای های متعامد

صفرهای چندجمله ای های متعامد در روش های طیفی نقشی اساسی دارند. ما در اینجا به بررسی صفرهای چندجمله ای های متعامد و برخی از خواص آن می پردازیم [۳۴].

فرض کنید که $\{p_n\}$ یک دنباله از چندجمله ای های متعامد با درجه n نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ در بازه (a, b) باشد.

اولین نتیجه مهم درباره صفرهای چندجمله ای ها به صورت زیر بیان می شود :

قضیه ۲. صفرهای p_{n+1} همگی حقیقی ، ساده و در بازه (a, b) قرار دارند.

برهان. مراجعه به منبع [۲].

اکنون به قضیه زیر می پردازیم که جداسازی صفرها را بیان می کند.

قضیه ۳. فرض کنید $a = x_0$ و $b = x_{n+1}$ باشند و صفرهای p_n را با ترتیب زیر مشخص می کنیم :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

آنگاه در هر زیربازه (x_j, x_{j+1}) دقیقاً یک صفر از p_{n+1} وجود دارد، برای $j = 0, 1, \dots, n$.

یک نتیجه مستقیم به صورت زیر است :

نتیجه ۴. فرض کنید $\{p_n\}$ دنباله ای از چندجمله ای های متعامد باشد که درجه p_n برابر n باشد. آنگاه صفرهای p'_n حقیقی

وساده هستند و دقیقاً یک صفر از p'_n بین دو صفر متوالی از p_n وجود دارد [۸].

۳-۱- محاسبه صفرهای چندجمله ای های متعامد

در ادامه دو الگوریتم کارآمد برای محاسبه صفرهای چندجمله ای های متعامد ارائه می دهیم [۸-۲].

قضیه ۴. صفرهای $\{x_j\}_{j=0}^n$ چندجمله ای متعامد $p_{n+1}(x)$ همان مقادیرویزه ماتریس متقارن سه قطری زیرهستند :

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ & & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}$$

که در آن :

$$\alpha_j = \frac{b_j}{a_j}, \quad j \geq 0; \quad \beta_j = \frac{1}{a_j - 1} \sqrt{\frac{a_{j-1}c_j}{a_j}}, \quad j \geq 1$$

در اینجا ضرایب $\{a_j, b_j, c_j\}$ از رابطه بازگشتی سه جمله ای به دست می آیند، یعنی :

$$p_{j+1}(x) = (a_j x - b_j)p_j(x) - c_j p_{j-1}(x), \quad j \geq 0$$

با شرط $p_{-1} := 0$.

برهان. ابتدا چندجمله ای های متعامد $\{p_j\}$ را با تعریف زیر نرمال سازی می کنیم :

$$\gamma_j = \|p_j\|_{\omega}^2 \quad \text{با} \quad \tilde{p}_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_j}} p_j(x)$$

که در نتیجه داریم : $\|\tilde{p}_j\|_{\omega} = 1$. بنابراین رابطه زیر را داریم :

$$\begin{aligned} x\tilde{p}_j &= \frac{c_j}{a_j} \sqrt{\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_j}} \tilde{p}_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \tilde{p}_j + \frac{1}{a_j} \sqrt{\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}} \tilde{p}_{j+1} \\ &= \frac{1}{a_{j-1}} \sqrt{\frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}}} \tilde{p}_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \tilde{p}_j + \frac{1}{a_j} \sqrt{\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}} \tilde{p}_{j+1} \end{aligned}$$

$$= \beta_j \tilde{p}_{j-1}(x) + \alpha_j \tilde{p}_j(x) + \beta_{j+1} \tilde{p}_{j+1}(x)$$

در اینجا از نمادهای زیر استفاده کرده ایم :

$$\alpha_j := \frac{b_j}{a_j}, \quad \beta_j := \frac{1}{a_{j-1}} \sqrt{\frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}}}$$

و :

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}} = \frac{a_{j-1}c_j}{a_j} > 0 \rightarrow \beta_j = \frac{1}{a_{j-1}} \sqrt{\frac{a_{j-1}c_j}{a_j}}$$

سپس به صورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$x\tilde{p}_j = \beta_j\tilde{p}_{j-1}(x) + \alpha_j\tilde{p}_j(x) + \beta_{j+1}\tilde{p}_{j+1}(x) \quad (5)$$

اکنون مقادیر $j = 0, 1, \dots, n$ را در نظر می گیریم تا یک دستگاه معادلات به فرم ماتریسی ایجاد کنیم :

$$x\tilde{P}(x) = A_{n+1}\tilde{P}(x) + \beta_{n+1}\tilde{p}_{n+1}(x)E_{n+1}$$

که در آن، A_{n+1} داده شده است و

$$\tilde{P}(x) = (\tilde{p}_0(x), \tilde{p}_1(x), \dots, \tilde{p}_n(x))^T, \quad E_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$$

از آنجا که $\tilde{p}_{n+1}(x_j) = 0, 0 \leq j \leq n$ ، دستگاه در $x = x_j$ به شکل زیر ساده می شود :

$$x_j\tilde{P}(x_j) = A_{n+1}\tilde{P}(x_j), \quad 0 \leq j \leq n$$

بنابراین $\{x_j\}_{j=0}^n$ مقادیر ویژه ماتریس سه قطری متقارن A_{n+1} است. □

در ادامه روش جایگزین برای یافتن صفرهای چندجمله ای های متعامد را ارائه می دهیم [۴].

روش جایگزین برای یافتن صفرهای چندجمله ای متعامد، استفاده از روش تکراری است. به طور دقیق تر، فرض کنید x_j^0 یک

تقریب اولیه برای صفر x از $p_{n+1}(x)$ باشد. سپس می توان یک روش تکراری عمومی به صورت زیر ساخت :

$$\begin{cases} x_j^{k+1} = x_j^k + D(x_j^k), 0 \leq j \leq n, k \geq 0 \\ \{x_j^0\} \text{ با توجه به} \end{cases}$$

انواع روش های تکراری براساس تابع انحراف $D(x)$:

تابع انحراف $D(x)$ نوع روش تکراری را تعیین می کند. برای مثال :

(۱) روش نیوتن که یک روش مرتبه دوم است، بارابطه :

$$D(x) = -\frac{p_{n+1}(x)}{p'_{n+1}(x)}$$

(۲) روش لاگر که یک روش مرتبه سوم است، بارابطه :

$$D(x) = -\frac{p_{n+1}(x)}{p'_{n+1}(x)} - \frac{p_{n+1}(x)p''_{n+1}(x)}{2(p'_{n+1}(x))^2}$$

روش های مرتبه بالاتر:

روش های با مرتبه بالاتر می توانند با استفاده از مشتقات p_{n+1} ساخته شوند. موفقیت یک روش تکراری اغلب به کیفیت تخمین اولیه بستگی دارد. اگر تخمین اولیه به اندازه کافی نزدیک نباشد، ممکن است الگوریتم به مقادیر نادرست همگرا شود یا حتی واگرا گردد. همان طور که دیدیم دو روش برای یافتن صفرهای چندجمله ای متعامد نشان دادیم :

* روش مقدار ویژه: که با استفاده از مقادیرویزه ماتریس سه قطری متقارن صفرها را پیدا می کند.

* روش های تکراری: مانند نیوتن و لاگر که براساس تقریب اولیه صفرهای چندجمله ای را تخمین می زنند.

۴- دسته بندی روش های درجه بندی نوع گاوس

اهمیت درجه بندی گاوسی:

هدف اصلی در درجه بندی عددی تقریب مقدار انتگرال با استفاده از تعداد محدودی گره و وزن است. فرمول های درجه بندی نوع گاوس در میان روش های انتگرال گیری عددی از دقت بسیار بالایی برخوردارند، زیرا با n گره قادر به انتگرال گیری دقیق چندجمله ای هایی تا درجه $2n-1$ هستند.

اکنون به بررسی روابط بین چندجمله ای های متعامد و فرمول های انتگرال گیری نوع گاوس می پردازیم.

مکانیزم یک روش درجه بندی نوع گاوس این است که بهترین تقریب عددی از یک انتگرال را با انتخاب نقاط بهینه برای ارزیابی انتگرال تعیین کند. این روش متعلق به خانواده فرمول های درجه بندی عددی است :

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^N f(x_j)\omega_j + E_N[F] \quad (6)$$

که در آن :

$$(1) \{x_j, \omega_j\}_{j=0}^N \text{ گره های درجه بندی و وزن ها هستند.}$$

$$(2) E_N[F] \text{ خطای درجه بندی است.}$$

خطا درجه بندی به صورت زیر محاسبه می شود.

فرض می کنیم که نقاط $\{x_j\}_{j=0}^N$ متمایز باشند. اگر $f(x) \in C^{N+1}[a, b]$ داریم :

$$E_N[F] = \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b f^{(N+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^N (x - x_i) dx$$

که در آن $\xi(x) \in [a, b]$.

تعریف ۴. چندجمله ای های پایه لاگرانژ متناظر با $\{x_j\}_{j=0}^N$ به صورت زیر تعریف می شوند [۳۳] :

$$h_j(x) = \prod_{i=0; i \neq j}^N \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad 0 \leq j \leq N$$

باجایگذاری $f(x) = h_j$ ، وزن های درجه بندی به دست می آیند :

$$\omega_j = \int_a^b h_j(x) \omega(x) dx, \quad 0 \leq j \leq N \quad (7)$$

مقدار خطای E_N ، برای هر چندجمله ای p از درجه حداکثر m صفر است، اما یک چندجمله ای q از درجه $m + 1$ وجود دارد که مقدار خطای $E_N[q]$ آن صفر نیست.

برای هر $N + 1$ نقطه متمایز (a, b) ، $\{x_j\}_{j=0}^N$ مقدار درجه دقت فرمول انتگرال گیری در بازه بین N و $2N + 1$ است.

علاوه بر این اگر نقاط $\{x_k\}_{k=0}^N$ به عنوان صفرهای چندجمله ای متعامد p_{N+1} نسبت به وزن ω انتخاب شوند، این روش به حداکثر درجه دقت $2N + 1$ می رسد. این روش درجه بندی گاوسی نامیده می شود [۲-۳۵].

قضیه ۵. فرض کنید $\{x_j\}_{j=0}^N$ مجموعه صفرهای چندجمله ای متعامد p_{N+1} باشد. آنگاه یک مجموعه یکتا از وزن های درجه بندی $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ وجود دارد به طوری که :

$$\int_a^b p(x) \omega(x) dx = \sum_{j=0}^N p(x_j) \omega_j, \quad \forall p \in P_{2N+1}$$

وزن های درجه بندی مثبت هستند و به صورت زیر داده می شوند :

$$\omega_j = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{\|p_N\|_{\omega}^2}{p_N(x_j) p'_{N+1}(x_j)}, \quad 0 \leq j \leq N$$

که در آن k_j ضریب پیشرو p_j است.

قضیه بنیادی بالا نشان می دهد که :

* بهینه ترین نقاط انتخاب شده در روش گاوس، دقیقاً صفرهای چندجمله ای متعامد متناظر با بازه و تابع وزن یکسان هستند.

* در روش درجه بندی گاوس بهترین تقریب ممکن فراهم می شود، به دلیل اینکه همه چندجمله ای های تا درجه $2N + 1$

را دقیقاً درجه بندی می کند.

* به جز موارد خاص (مانند چندجمله ای های چبیشف)، هیچ فرم صریحی برای گره ها و وزن های درجه بندی وجود ندارد. نکته: در درجه بندی گاوسی استاندارد، تمام نقاط گرهی درون بازه (a, b) قرار دارند و این باعث می شود شرایط مرزی را نتوان مستقیماً اعمال کرد.

برای رفع مشکل بالا، از درجه بندی گاوس - رادو و درجه بندی گاوس - لوباتو استفاده می شود. این روشها شامل یکی یا هر دو نقطه انتهایی بازه به عنوان نقاط گرهی هستند.

۱-۴- درجه بندی گاوس - رادو

فرض کنید می خواهیم نقطه ابتدایی $x = a$ را در فرمول درجه بندی درج کنیم. چندجمله ای $q_N(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$q_N(x) = \frac{p_{N+1}(x) + \alpha_N p_N(x)}{x-a} \quad (8)$$

با مقدار :

$$\alpha_N = -\frac{p_{N+1}(a)}{p_N(a)}$$

خواص چندجمله ای $q_N(x)$:

(۱) واضح است که $q_N \in P_N$ است.

(۲) برای هر $r_{N-1} \in P_{N-1}$ با استفاده از لم (۱-۱) نتیجه می شود :

$$\int_a^b q_N(x) r_{N-1}(x) \omega(x) (x-a) dx = \int_a^b (p_{N+1}(x) + \alpha_N p_N(x)) r_{N-1}(x) \omega(x) dx = 0$$

این نشان می دهد که چندجمله ای های q_N دنباله ای از چندجمله ای های متعامد نسبت به تابع وزن تغییر یافته $\tilde{\omega}(x) := \omega(x)(x-a)$ هستند و ضرب پیشرو q_N برابر k_{N+1} است [۶].

قضیه ۶ (درجه بندی گاوس - رادو). فرض کنید $x_0 = a$ و $\{x_j\}_{j=1}^N$ صفرهای $q_N(x)$ باشند در نتیجه یک مجموعه

یکتا از وزن های درجه بندی $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ وجود دارد

این وزن ها رابطه زیر را برقرار می کنند :

$$\int_a^b p(x) \omega(x) dx = \sum_{j=0}^N p(x_j) \omega_j, \quad \forall p \in P_{2N} \quad (9)$$

وزن های درجه بندی همگی مثبت هستند و به صورت زیر بیان می شوند :

$$\omega_0 = \frac{1}{q_N(a)} \int_a^b q_N(x) \omega(x) dx$$

$$\omega_j = \frac{1}{x_j - a} \frac{k_{N+1}}{k_N} \frac{\|q_{N-1}\|_\omega^2}{q_{N-1}(x_j) q'_N(x_j)}, \quad 1 \leq j \leq N$$

روش گاوس - رادو به ما این امکان را می دهد که یکی از نقاط گرهی را در مرز بازه انتخاب کنیم. به طور مشابه می توان یک روش دیگر برای درجه بندی گاوس - رادو ساخت، در صورتی که بخواهیم نقطه انتهایی سمت راست $b = x$ را به جای نقطه انتهایی سمت چپ $a = x$ در نظر بگیریم.

۲-۴- درجه بندی گاوس - لوباتو

اکنون به درجه بندی گاوس - لوباتو می پردازیم که در آن هر دو نقطه انتهایی $a, b = x$ به عنوان نقاط گرهی لحاظ می شوند [۴۰-۲].

در این حالت ضرایب α_N و β_N را برای $x = a, b$ را به گونه ای انتخاب می کنیم که معادله زیر برقرار باشد :

$$p_{N+1}(x) + \alpha_N p_N(x) + \beta_N p_{N-1}(x) = 0$$

سپس چندجمله ای $z_{N-1}(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$z_{N-1}(x) = \frac{p_{N+1}(x) + \alpha_N p_N(x) + \beta_N p_{N-1}(x)}{(x-a)(b-x)}$$

خواص چندجمله ای $z_{N-1}(x)$:

(۱) z_{N-1} یک چندجمله ای در P_{N-1} است.

(۲) برای هر $r_{N-2} \in P_{N-2}$ با استفاده از لم ۱ نتیجه می شود :

$$\int_a^b z_{N-1} r_{N-2} (x-a)(b-x) \omega dx = \int_a^b (p_{N+1} + \alpha_N p_N + \beta_N p_{N-1}) r_{N-2} \omega dx = 0 \quad (10)$$

این رابطه نشان می دهد که دنباله چندجمله ای های $\{z_{N-1} : N \geq 1\}$ نسبت به تابع وزن اصلاح شده :

$$\hat{\omega}(x) := (x-a)(b-x)\omega(x)$$

متعامد هستند.

اکنون به قضیه زیر می پردازیم که درجه بندی گاوس - لوباتو را بیان می کند [۲].

قضیه ۷. فرض کنید $x_0 = a, x_N = b$ و $\{x_j\}_{j=1}^{N-1}$ صفرهای چندجمله ای z_{N-1} ، مجموعه یکتا از وزن های درجه

بندی $\{\omega_j\}_{j=0}^N$ وجود دارد که این وزن ها رابطه زیر را برقرار می کنند :

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^N p(x_j)\omega_j, \quad \forall p \in P_{2N-1}$$

وزن های درجه بندی به صورت زیر بیان می شوند :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{(b-a)z_{N-1}(a)} \int_a^b (b-x)z_{N-1}(x)\omega(x)dx \\ \omega_j &= \frac{1}{(x_j-a)(b-x_j)} \frac{k_{N+1}}{k_N} \frac{\|z_{N-2}\|_{\omega}^2}{z_{N-2}(x_j)z'_{N-1}(x_j)}, \quad 1 \leq j \leq N-1 \\ \omega_N &= \frac{1}{(b-a)z_{N-1}(b)} \int_a^b (x-a)z_{N-1}(x)\omega(x)dx\end{aligned}$$

تمام وزن های درجه بندی مثبت هستند.

۵- معرفی انواع چند جمله ای های متعامد

در این بخش، در ابتدا به معرفی چند جمله ای های ژاکوبی و ویژگی های آن پرداخته و در ادامه، تعریف چند جمله ای های لژاندر و چبیشف که از چند جمله ای های ژاکوبی نتیجه می شوند را بیان خواهیم کرد. چند جمله ای های متعامد دیگری مانند لاگر و هرمیت وجود دارند که برای مطالعه بیشتر می توان به مرجع [۲] رجوع کرد.

۵-۱- چند جمله ای های ژاکوبی

چند جمله ای های ژاکوبی که با $J_n^{\alpha,\beta}(x)$ نمایش داده می شوند، نسبت به تابع وزن

$$\omega^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

بر بازه $(-1, 1)$ متعامد هستند. به عبارتی دیگر :

$$\int_{-1}^1 J_n^{\alpha,\beta}(x) J_m^{\alpha,\beta}(x) \omega^{\alpha,\beta}(x) dx = \gamma_n^{\alpha,\beta} \delta_{mn}$$

$$\gamma_n^{\alpha,\beta} = \|J_n^{\alpha,\beta}\|_{\omega^{\alpha,\beta}}^2$$

که در آن $\gamma_n^{\alpha,\beta}$ فرم بسته چند جمله ای های ژاکوبی به صورت زیر تعریف می شود :

$$J_n^{\alpha, \beta}(x) = 2^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{j} \binom{n+\beta}{n-j} (x-1)^{n-j} (x+1)^j \quad (11)$$

ویژگی تقارنی این توابع نیز عبارت است از :

$$J_n^{\alpha, \beta}(-x) = (-1)^n J_n^{\alpha, \beta}(x)$$

فرم بازگشتی چندجمله ای های ژاکوبی به صورت زیر تعریف می شود :

$$J_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) = (a_n^{\alpha, \beta} - b_n^{\alpha, \beta}) J_n^{\alpha, \beta}(x) - c_n^{\alpha, \beta} - c_n^{\alpha, \beta} J_{n-1}^{\alpha, \beta}(x), \quad n \geq 1$$

$$J_0^{\alpha, \beta}(x) = 1$$

$$J_1^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

دراین تعریف، ضرایب $a_n^{\alpha, \beta}$ ، $b_n^{\alpha, \beta}$ ، $c_n^{\alpha, \beta}$ ضرایب معلوم و قابل محاسبه می باشند (برای اثبات و اطلاعات بیشتر می توان به مراجع [۴۱-۴۰-۲] رجوع کرد).

۲-۵- چندجمله ای های لژاندر

چندجمله ای های لژاندر به صورت زیر قابل تعریف می باشند [۴۱] :

$$L_n(x) = J_n^{0,0}(x), \quad n \geq 0, \quad x \in (-1, 1) \quad (12)$$

باتوجه به فرمول ردیگر :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dn^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n \geq 0$$

فرم بسته این چندجمله ای ها عبارت است از :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \frac{(2n-2l)!}{l! (n-l)! (n-2l)!} x^{n-2l}$$

فرم بازگشتی چندجمله ای های لژاندر نیز عبارت است از :

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), & n \geq 1 \\ L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \end{cases}$$

چندجمله ای های لژاندرمتناظر با تابع وزن $\omega(x) = 1$ دارای ویژگی تعامد می باشند :

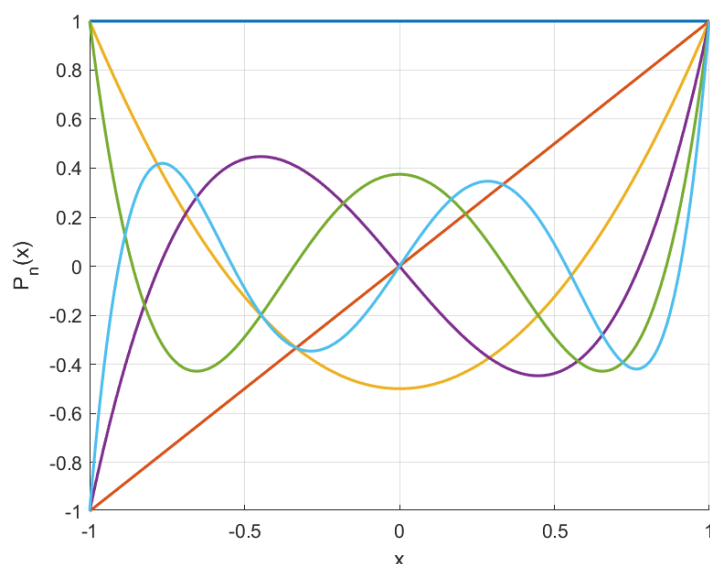
$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \gamma_n \delta_{mn}$$

$$\gamma_n = \frac{2}{2n+1}$$

ویژگی تقارنی این توابع نیز عبارت است از :

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x)$$

نمودار تعدادی از چندجمله ای های لژاندر در شکل زیر آمده است :



شکل ۱: نمودار تعدادی از چندجمله ای های لژاندر

۳-۵- چندجمله ای های چبیشف

چندجمله ای های چبیشف دنباله ای از چندجمله ای های متعامد هستند که در نظریه تقریب از اهمیت ویژه برخوردار هستند. چندجمله ای های چبیشف از نوع اول به صورت زیر قابل تعریف می باشند [۴۰-۲]:

$$T_n(x) = J_n^{-0.5, -0.5}(x), \quad n \geq 0 \quad x \in (-1, 1)$$

فرم بازگشتی این توابع عبارت است از:

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) , & n \geq 1 \\ T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{cases}$$

که در آن تابع T_n زوج است اگر n زوج باشد و فرد است اگر n فرد باشد.
تعریف دیگری از چندجمله ای های چبیشف نوع اول به صورت زیر بیان می شود [۴۱]:

$$T_n(x) = \cos(n\theta) , \quad \theta = \arccos(x) , \quad n \geq 0 , \quad x \in (-1, 1)$$

ویژگی تقارنی این تابع نیز عبارت است از :

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

چندجمله ای های چبیشف از نوع اول متناظر با تابع وزن

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

به صورت زیردارای ویژگی تعامد می باشند :

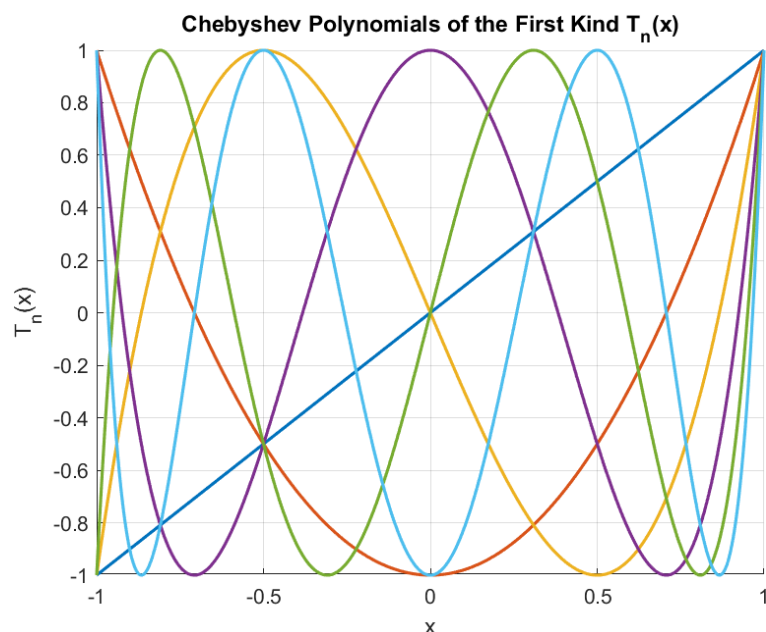
$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \omega(x) dx = \gamma_n \delta_{mn}$$

که در آن :

$$\gamma_n = c_n \frac{\pi}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & n \geq 1 \end{cases}$$

نمودار تعدادی از چندجمله ای های چبیشف نوع اول به صورت شکل زیر می باشد :



شکل ۲: نمودار تعدادی از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول

۶- نتیجه گیری و پیشنهادات

در این مقاله به مطالعه برخی از مهم‌ترین جنبه‌های نظری چندجمله‌ای‌های متعامد پرداخته شد. ابتدا وجود و یکتایی خانواده‌های چندجمله‌ای‌های متعامد نسبت به یک تابع وزن مثبت بررسی گردید و رابطه بازگشتی سه‌جمله‌ای به عنوان ابزاری بنیادی برای تولید این چندجمله‌ای‌ها معرفی شد. سپس خواص مهمی نظیر هسته کریستوفل-داربو و نتایج مرتبط با آن مورد مطالعه قرار گرفت. در ادامه، صفرهای چندجمله‌ای‌های متعامد و ویژگی‌های اساسی آن‌ها شامل حقیقی بودن، سادگی و خاصیت جداسازی صفرها بررسی شد. همچنین نشان داده شد که این صفرها ارتباط نزدیکی با مقادیر ویژه ماتریس‌های سه‌قطری متقارن دارند و از این طریق می‌توان آن‌ها را به طور مؤثر محاسبه کرد. بخش دیگری از این پژوهش به بررسی ارتباط چندجمله‌ای‌های متعامد با فرمول‌های درجه‌بندی نوع گاوس اختصاص یافت. در این راستا، فرمول‌های گاوس، گاوس-رادو و گاوس-لوباتو معرفی شدند و نقش صفرهای چندجمله‌ای‌های متعامد در تعیین گره‌ها و وزن‌های این فرمول‌ها مورد بررسی قرار گرفت. در پایان نیز خانواده‌های مهم ژاکوبی، لژاندر و چبیشف معرفی شدند و برخی از ویژگی‌های اساسی آن‌ها بیان گردید. نتایج ارائه‌شده نشان می‌دهد که چندجمله‌ای‌های متعامد یکی از بنیادی‌ترین ابزارهای نظری در تقریب توابع، انتگرال‌گیری عددی و توسعه روش‌های طیفی به شمار می‌روند و مطالعه آن‌ها زمینه‌ساز بسیاری از پژوهش‌های پیشرفته در ریاضیات محض و کاربردی است.

مراجع

- 1- A Bilinear Pseudo-spectral Method for Solving Two-asset European and American Pricing Options;M.khasi.,J.rashidinia(2023) ,springer
- 2-Shen, Jie., Tang, Tao., & Wang, Li-Lian. (2011). Spectral methods: algorithms, analysis and applications, volum
- 3-Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- 4-Černá, Dana. (2016). Numerical solution of the black-scholes equation using cubic spline wavelets. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1789, page 030001. AIP Publishing LLC.
- 5-Chiarella, C., Griebisch, S., & Kang, B. (2014). A comparative study on time-efcient methods to price compoundoptions in the heston model. *Computers Mathematics with Applications*, 67(6), 1254–1270.
- 6-Fasshauer, G. E., Khaliq, A. Q. M., & Voss, D. A. (2004). Using meshfree approximation for multiassetAmerican options. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 27(4), 563–571.
- 7-Franke, Jürgen., Härdle, Wolfgang Karl., & Hafner, Christian M. (2004) *Statistics of financial markets*, volume 2. Springer.
- 8-Gaß, M., Glau, K., Mahlstedt, M., & Mair, M. (2018). Chebyshev interpolation for parametric optionpricing. *Finance and Stochastics*, 22(3), 701–731.
- 9-Golbabai, A., & Nikan, O. (2020). A computational method based on the moving least-squares approach for pricing double barrier options in a time-fractional black-scholes model. *Computational Economics*
- 10-Haentjens, T., & Hout, K. J. (2015). Adi schemes for pricing American options under the Heston model. *Applied Mathematical Finance*, 22(3), 207–237.
- 11-Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications tobond and currency options. *The review of fnancial studies*, 6(2), 327–343.
- 12-Hout, K. J., & Toivanen, J. (2018). Adi schemes for valuing European options under the bates model. *Applied Numerical Mathematics*, 130, 143–156.\
- 13-Hull, John C. (2022). *Options futures and other derivatives*. Pearson Education India.
- 14-Ikonen, S., & Toivanen, J. (2004). Operator splitting methods for American option pricing. *Applied mathemathis*
- 15-Ikonen, S., & Toivanen, J. (2009). Operator splitting methods for pricing American options under stochastic.113(2).299-324
- 16-Jo, J., & Kim, Y. (2013). Comparison of numerical schemes on multi-dimensional Black–Scholes equation.
- 17-Khan, A., Dutt, P., & Upadhyay, C. S. (2015). Nonconforming least-squares spectral element method forEuropean options. *Computers Mathematics with Applications*, 70(1), 47–65.

- 18-Kozpınar, S., Uzunca, M., & Karasözen, B. (2020). Pricing European and American options under Heston model using discontinuous Galerkin finite elements. *Mathematics and Computers in Simulation*. 177, 568–587.
- 19-Laris, Mariano Zeron Medina., & Ruiz, Ignacio. (2018). Chebyshev methods for ultra-efficient risk calculations. 2018
- 20-Larsson, E., Åhlander, K., & Hall, A. (2008). Multi-dimensional option pricing using radial basis functions and the generalized Fourier transform. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 222(1), 175–192.
- 21-Lötstedt, P., Persson, J., von Sydow, L., & Tysk, J. (2007). Space-time adaptive finite difference method for European multi-asset options. *Computers Mathematics with Applications*, 53(8), 1159–1180.
- 22-MacKenzie, Donald. (2008). *An engine, not a camera: How financial models shape markets*. MIT Press .
- 23-Margrabe, W. (1978). The value of an option to exchange one asset for another. *The Journal of Finance*, 33(1), 177–186.
- 24-Milovanović, S., & von Sydow, L. (2018). Radial basis function generated finite differences for option pricing problems. *Computers Mathematics with Applications*, 75(4), 1462–1481.
- 25-Mollapourasl, R., Fereshtian, A., & Vanmaele, M. (2019). Radial basis functions with partition of unity method for American options with stochastic volatility. *Computational Economics*, 53(1), 259–287.
- 26-Moreni, N. (2004). A variance reduction technique for American option pricing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 338(1–2), 292–295.
- 27-Nielsen, B. F., Skavhaug, O., & Tveito, A. (2002). Penalty and front-fixing methods for the numerical solution of American option problems. *Journal of Computational Finance*, 5(4), 69–98
- 28-Nikan, Omid., Avazzadeh, Zakieh., & Tenreiro Machado. José A. (2021). Localized kernel-based meshless method for pricing financial options underlying fractal transmission system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.
- 29-Oosterlee, C. W. (2003). On multigrid for linear complementarity problems with application to American-style options.
- 30-Persson, J., & von Sydow, L. (2003). Pricing European multi-asset options using a space-time adaptive fd-method. *Computing and Visualization in Science* (pp. 173–83). Dept. of Information Technology: Uppsala University, Uppsala, Sweden.
- 31-Putri, E. R. M., Mardianto, L., Hakam, A., Imron, C., & Susanto, H. (2021). Removing non-smoothness in solving Black–Scholes equation using a perturbation method. *Physics Letters A*, 402, 127367.
- 32-Rashidinia, J., & Khasi, M. (2019). Stable gaussian radial basis function method for solving Helmholtz equations. *Computational Methods for Differential Equations*, 7(1), 138–151.
- 33-Rashidinia, J., Khasi, M., & Fasshauer, G. E. (2018). A stable gaussian radial basis function method for solving nonlinear unsteady convection-diffusion-reaction equations. *Computers Mathematics with Applications*, 75(5), 1831–1850.

- 34-Samadi, F., Heydari, A., & Efati, S. (2020). A numerical method based on a bilinear pseudo-spectral method to solve the convection-difusion optimal control problems. *International Journal of Computer Mathematics*.98(1).28-46
- 35-Ullah, M. Z. (2020). An RBF-FD sparse scheme to simulate high-dimensional Black–Scholes partial diffrentiol equatins
- 36-Van Loan, C. F. (2000). The ubiquitous Kronecker product. *Journal of computational and applied mathematics*
- 37-Zeron, Mariano., & Ruiz, Ignacio. (2018). Dynamic initial margin via chebyshev spectral decomposition. Technical report, Technical report, Working paper (24 August).
- 38-Zhang, L., Lai, Y., Zhang, S., & Li, L. (2019). Efcient control variate methods with applications tovexotic options pricing under subordinated Brownian motion models. *The North American Journal ofEconomics and Finance*, 47, 602–621.
- 39-Zhang, K., Wang, S., Yang, X., & Teol, K. L. (2009). A power penalty approach to numerical solutionsof two-asset American options. *Numerical Mathematics Theory Methods and Applications*, 2, 202–223.
- 40-Zhu, W., & Kopriva, D. A. (2009). A spectral element approximation to price European options. II. theBlack-Scholes model with two underlying assets. *Journal of Scientific Computing*, 39, 323–39.
- 41-Zvan, R., Forsyth, P. A., & Vetzal, K. R. (1998). Penalty methods for American options with stochasticvolatility. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 91(2), 199–218.

