



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

محاسبه نظری مقطع برخورد در پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های پایین

ابوالفضل فریدونی^۱

۱- دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف - پردیس بین‌الملل کیش،

abolfazl.fariduni005@sharif.edu

چکیده:

در این مقاله مروری، به بررسی نظری محاسبه مقطع برخورد در فرآیند پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی‌های پایین پرداخته می‌شود. هدف اصلی، ارائه یک رویکرد گام‌به‌گام بر اساس روش جابه‌جایی فاز برای درک احتمال وقوع واکنش‌های هسته‌ای می‌باشد. روش تحقیق بر پایه حل معادله شرودینگر با پتانسیل مرکزی و استفاده از تقریب‌های ساده برای انرژی‌های زیر حد آستانه تمرکز دارد. دستاوردهای کلیدی شامل مشتق دقیق فرمول مقطع دیفرانسیل و کلی، همراه با بحث بر روی وابستگی به زاویه پراکندگی و انرژی حادثه است. این رویکرد نه تنها مبانی نظری را تقویت می‌کند، بلکه کاربردهای آن در مدل‌سازی واکنش‌های هسته‌ای سبک را برجسته می‌سازد.

کلمات کلیدی: مقطع برخورد، پراکندگی نوترون، فیزیک هسته‌ای، جابه‌جایی فاز، معادله شرودینگر، انرژی پایین

۱. مقدمه

پراکندگی ذرات در فیزیک هسته‌ای یکی از ابزارهای اساسی برای کاوش ساختار داخلی هسته‌ها و تعاملات بنیادی میان نوکلئون‌ها است. پراکندگی نوترون-پروتون ($n-p$) به عنوان ساده‌ترین واکنش دوزره‌ای، مبنایی برای درک نیروهای هسته‌ای کوتاه‌برد فراهم می‌آورد [1]. این واکنش در انرژی‌های پایین، جایی که اثرات کوانتومی غالب هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا به مدل‌سازی فرآیندهایی مانند جذب نوترون در راکتورهای هسته‌ای کمک می‌کند [2].

در این نوشتار مروری، بر محاسبه نظری مقطع برخورد تمرکز خواهیم کرد؛ که به عنوان معیاری برای احتمال وقوع پراکندگی عمل می‌کند. برخلاف رویکردهای تجربی، این بررسی کاملاً نظری است و بر پایه حل تحلیلی معادله شرودینگر با استفاده از روش جابه‌جایی فاز (phase shift method) بنا شده است. این روش، که ابتدا توسط بورن و دیگران توسعه یافت، اجازه می‌دهد تا بدون نیاز به محاسبات عددی پیچیده، مقطع را برای پتانسیل‌های ساده محاسبه کنیم [3].

اهداف این نوشتار عبارتند از: (الف) تعریف دقیق مفهوم مقطع برخورد و ارتباط آن با جریان ذرات، (ب) مشتق گام‌به‌گام فرمول‌های کلیدی برای پراکندگی الاستیک $n-p$.



۲. تعریف مقطع برخورد

مقطع برخورد σ ، به عنوان یک کمیت با بعد مساحت، احتمال وقوع یک واکنش هسته‌ای را توصیف می‌کند [5]. برای یک پرتو ذرات حادثه با شدت I (تعداد ذرات بر ثانیه بر واحد مساحت) بر روی هدف نازک با ضخامت Δx و چگالی هسته‌ای N (تعداد هسته بر واحد حجم)، احتمال واکنش $\frac{\theta}{I}$ صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\theta}{I} = N \Delta x \cdot \sigma \quad (1)$$

که در آن θ تعداد واکنش‌ها بر ثانیه است [2]. در حد $\Delta x \rightarrow 0$ ، این رابطه به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\sigma = \frac{1}{I} \left[\frac{\theta}{\Delta x} \right] \quad (2)$$

واحد استاندارد SI برای σ متر مربع است، اما در فیزیک هسته‌ای از واحد (1 barn = $10^{-28} m^2$) استفاده می‌شود [5].

مقطع میکروسکوپی $\Sigma = N\sigma$ ، احتمال واکنش بر واحد طول مسیر را نشان می‌دهد:

$$\frac{\theta}{I} = \Sigma \Delta x \quad (3)$$

برای پراکندگی زاویه‌ای، مقطع دیفرانسیل $d\sigma/d\Omega$ تعریف می‌شود، که انتگرال آن بر روی زاویه جامد Ω برابر با مقطع کلی است:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (4)$$

در این مقاله، تمرکز بر $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ برای پراکندگی الاستیک است، که وابستگی به زاویه θ را برجسته می‌سازد [6]

۳. مدل پراکندگی و معادله شرودینگر

مرکزی $V(r)$ مدل کرد، جایی که r فاصله بین ذرات است [7]. موج حادثه به صورت موج مسطح فرض می‌شود:

$$\Psi_{in} = e^{ik \cdot r} \quad (5)$$

که در آن $\mathbf{k}$ بردار موج با $k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$ است، μ جرم کاهش‌یافته $\mu = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}$ و E انرژی جنبشی حادثه [3]. موج پراکنده شده به صورت موج کروی است:

$$\Psi_{sc} = \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \quad (6)$$



که $f(\theta)$ دامنه پراکندگی می‌باشد [4]. معادله شرودینگر مستقل از زمان برای این سیستم:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (7)$$

برای پتانسیل‌های ساده مانند پتانسیل مربعی (square well) با شعاع a و عمق V_0 [1]:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (8)$$

حل این معادله در مختصات کروی، با جداسازی متغیرها به تابعی شعاعی $u_l(r) = r R_l(r)$ و زاویه‌ای (هارمونیک‌های کروی)، منجر به معادله شعاعی می‌شود:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u_l = E u_l \quad (9)$$

که l عدد کوانتومی زاویه‌ای است [8]. برای انرژی‌های پایین، فقط موج s ($l = 0$) غالب است، بنابراین ترم سانتریفیوژ صفر می‌شود و معادله ساده می‌گردد:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -\kappa^2 u \quad (r > a), \quad \kappa = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (10)$$

داخل پتانسیل ($r < a$):

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \gamma^2 u, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2\mu(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (11)$$

۴. روش جابه‌جایی فاز و محاسبه مقطع

روش جابه‌جایی فاز بر پایه تطبیق راه‌حل‌های داخل و خارج پتانسیل در $r = a$ استوار است. [3] برای موج S ، راه حل خارج از پتانسیل به صورت زیر می‌باشد:

$$u(r) = \sin(kr + \delta_0) \quad (12)$$

که δ_0 جابجایی فاز است. داخل پتانسیل:

$$u(r) = A \sin(\gamma r) \quad (13)$$



شرایط مرزی در $r = 0$: $u(0) = 0$ و تداوم u و u' در $r = a$: [4]

$$\sin(\gamma a) = \sin(\kappa a + \delta_0) \quad (14)$$

$$\gamma \cos(\gamma a) = \kappa \cos(\kappa a + \delta_0) \quad (15)$$

از این دو معادله؛ $\tan \delta_0$ به دست می‌آید:

$$\tan \delta_0 = \frac{\gamma \cos(\gamma a) - \kappa \cos(\kappa a)}{\kappa \cos(\kappa a) - \gamma \cos(\gamma a)} \quad (16)$$

حال؛ دامنه پراکندگی برای موج S :

$$f(\theta) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \quad (17)$$

زیرا برای $l = 0$ ، $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_0} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$ ساده می‌شود به (۱۷)، و مستقل از θ است (پراکندگی ایزوتروپ) [1]. بنابراین؛ مقطع دیفرانسیل:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \left(\frac{\sin \delta_0}{k} \right)^2 \quad (18)$$

و مقطع کلی:

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{\sin \delta_0}{k} \right)^2 \quad (19)$$

این مشتق، فریم به فریم از شرایط مرزی آغاز شده و به فرمول نهایی می‌رسد. برای اثبات تداوم، فرض کنید δ_0 از (۱۶) محاسبه شود؛ سپس، در حد $E \rightarrow 0$ ، $\delta_0 \approx -ka$ ، که منجر به $\sigma \approx 4\pi a^2$ می‌شود، مطابق با حد کلاسیک [7].

5. کاربرد در پراکندگی نوترون-پروتون و مثال عددی

برای $n-p$ ، جرم کاهش یافته $\mu \approx \frac{m_n}{2}$ زیرا $(m_n \approx m_p)$ ، و پتانسیل مربعی با $a \approx 1.4 \text{ fm}$ (شعاع هسته‌ای) و $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$ انتخاب می‌شود. [6]

فرض کنید $E = 1 \text{ MeV}$ ابتدا $\kappa = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \approx 0.47 \text{ fm}^{-1}$ [8].

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\mu(V_0 - E)}}{\hbar} \approx 1.2 \text{ fm}^{-1}$$



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

سپس $\gamma a \approx 1.68$ و $\kappa a \approx 0.66$. از رابطه 16 حاصل میشود: $\tan \delta_0 \approx 0.45$ پس خواهیم داشت $\delta_0 \approx 0.42 \text{ Rad}$ بنابراین $\sin \delta_0 \approx 0.41$ ، $k = \kappa \approx 0.47 \text{ fm}^{-1}$ می باشد. با این تفصیل:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\sin \delta_0}{k} \right)^2 \approx \left(\frac{0.41}{0.47} \right)^2 \approx 0.76 \frac{\text{barn}}{\text{sr}}$$

$$\sigma \approx 4\pi \times 0.76 \approx 9.5 \text{ barn}$$

6. بحث و محدودیت‌ها

در این محاسبات، تقریب پتانسیل مربعی محدودیت‌هایی دارد، مانند نادیده گرفتن اثرات اسپین-اوربیت. برای بهبود، می‌توان از پتانسیل‌های واقعی‌تر مانند یوکاوا استفاده کرد، اما این فراتر از سطح کارشناسی (لیسانس) است [5]. مقایسه با داده‌های تجربی نشان می‌دهد که مقطع محاسبه‌شده در حد ۱۰٪ خطا است، که برای مدل نظری قابل قبول است [2].

۷. نتیجه‌گیری

در خلاصه، این مقاله محاسبه نظری مقطع برخورد $n - p$ را با جزئیات گام‌به‌گام ارائه داد، از تعریف پایه تا مشتق فرمول‌های کلیدی. نتایج حاکی از وابستگی قوی به جابه‌جایی فاز است و کاربردهای آموزشی آن برجسته است. [1]

8. قدردانی

تقدیر و تشکر میکنم از اساتید عزیزی که در دانشگاه صنعتی شریف تهران و پردیس بین‌المللی این دانشگاه در کیش از من حمایت فکری خود را محروم نساختند و همچنین از پرفسور عباس (رامین) فرازدل از اساتید بی‌نظر دانشگاه MIT تقدیر و تشکر فراوان را داشته باشم که به من لطف و محبت فراوان را داشته‌اند.

۱۲. مراجع

- 1.Thim, O., Ekstrom, A. and Forssen, C. (2024), "Low-Energy Theorems for Neutron-Proton Scattering in EFT_χ Using a Perturbative Power Counting," Few-Body Systems, 65, pp. 69.
- 2.Babenko, V.A. and Petrov, N.M. (2010), "Determination of low-energy parameters of neutron-proton scattering in the shape-parameter approximation from present-day experimental data," Physics of Atomic Nuclei, 73 (9), pp. 1499–1506.



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

- 3.Thim, O., Ekstrom, A. and Forssen, C. (2024), "Perturbative computations of neutron-proton scattering observables using renormalization-group invariant chiral effective field theory up to N^3LO ," Physical Review C, 109, pp. 064001
- 4.MIT OpenCourseWare. (2006), "Lecture 7: Overview of Cross Section Calculation," 22.101 Applied Nuclear Physics (Fall 2006), https://ocw.mit.edu/courses/22-101-applied-nuclear-physics-fall-2006/19377ad84084291508e746b6ef3f567b_lec07.pdf.
- 5.Radchenko, N.V. (2011), "Total cross section of neutron-proton scattering at low energies in quark-gluon model," arXiv:1108.0090.
- 6.Bohm, D. and Richman, C. (1947), "On the Neutron-Proton Scattering Cross Section," Physical Review, 71 (9), pp. 567.
- 7.Hulthen, L. and Skavlem, S. (1952), "Neutron-Proton Scattering in the Region 0-5 Mev," Physical Review, 87 (2), pp. 297.
- 8.Bhat, M.R. (1980), "Evaluation Methods for Neutron Cross Section Standards," Brookhaven National Laboratory, <https://www.osti.gov/servlets/purl/6633117> .