



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده (SEC)

ابوالفضل فریدونی^۱

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران، abolfazl.fariduni005@sharif.edu

خلاصه

این مقاله علمی "هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده" (SEC) به عنوان مکانیسمی نوین برای حل تکینگی‌های کلاسیک در سیاه‌چاله‌ها است. تکینگی‌ها در نسبیت عام اینشتین نقاطی با چگالی و انحنای بی‌نهایت هستند که نشان‌دهنده شکست نظریه در توصیف دقیق این نواحی است. با ادغام اصول مکانیک کوانتومی، به ویژه درهم‌تنیدگی کوانتومی و اصل هولوگرافی، مدلی جدید حاصل می‌شود که این تکینگی‌ها را حذف می‌کند. در این تحقیق، اثبات‌های کامل تکینگی‌های کلاسیک از طریق نامتغیرهای انحنای گسترش یافته و نشان می‌دهد چگونه این تکینگی‌ها در نسبیت عام ظاهر می‌شوند. سپس، مفاهیم درهم‌تنیدگی کوانتومی و اصل هولوگرافی به تفصیل بیان شده و اشباع آنتروپی درهم‌تنیدگی به عنوان حدی اساسی در نظریه‌های میدان کوانتومی توضیح داده می‌شود. مدل هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده، یک تانسور تنش-انرژی کوانتومی مؤثر ناشی از اشباع درهم‌تنیدگی معرفی می‌کند. این تانسور معادلات میدان اینشتین را اصلاح کرده و منجر به متریک جدیدی بدون تکینگی در مرکز سیاه‌چاله می‌شود. این متریک اصلاح‌شده گام به گام مشتق شده و حل تکینگی با بررسی نامتغیرهای انحنای رفتارهای ژئودزیک اثبات می‌شود. در نهایت، پیامدهای ترمودینامیکی این مدل، از جمله اصلاحات دمای هاوکینگ و آنتروپی سیاه‌چاله، مورد بحث قرار می‌گیرد. این مدل چارچوبی منسجم برای حل پارادوکس اطلاعات سیاه‌چاله ارائه می‌دهد و توصیف کوانتومی کامل‌تری از گرانش در نواحی با انحنای بالا فراهم می‌کند.

کلمات کلیدی: تکینگی سیاه‌چاله، درهم‌تنیدگی کوانتومی، اصل هولوگرافی، گرانش کوانتومی، تابش هاوکینگ، آنتروپی سیاه‌چاله

۱. مقدمه

یکی از جذاب‌ترین مفاهیم در گرانش کوانتومی، ارتباط عمیق بین اطلاعات، درهم‌تنیدگی کوانتومی، و هندسه فضا-زمان است. اصل هولوگرافی، که بیان می‌کند تمام اطلاعات فیزیکی در یک حجم فضا-زمان می‌تواند روی مرز آن کدگذاری شود، نقش کلیدی در درک خواص ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها، به ویژه آنتروپی بکنشتاین-هاوکینگ ایفا می‌کند [8], [9]. آنتروپی سیاه‌چاله متناسب با مساحت افق رویداد آن است و پیوند عمیقی بین گرانش، ترمودینامیک، و مکانیک کوانتومی را آشکار می‌کند [10]. این مقاله مدل "هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده" (SEC) را معرفی و گسترش می‌دهد. این مدل پیشنهاد می‌کند که نزدیک تکینگی کلاسیک، آنتروپی درهم‌تنیدگی کوانتومی به دلیل محدودیت‌های اساسی در



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

ظرفیت ذخیره اطلاعات فضا زمان اشباع می‌شود. این اشباع درهم‌تنیدگی یک تانسور تنش-انرژی کوانتومی مؤثر تولید می‌کند که معادلات میدان اینشتین را اصلاح کرده و از تشکیل تکینگی در مرکز سیاه‌چاله جلوگیری می‌کند. در نتیجه، به جای تکینگی بی‌نهایت، یک ناحیه فیزیکی با چگالی و انحنای محدود، به نام "هسته درهم‌تنیده"، تشکیل می‌شود. این رویکرد نه تنها تکینگی را حل می‌کند، بلکه بینش‌های جدیدی در فیزیک درهم‌تنیدگی و طبیعت گرانش کوانتومی ارائه می‌دهد.

ساختار این مقاله به شرح زیر است: بخش ۲ به بررسی تکینگی‌های کلاسیک در نسبیت عام پرداخته و اثبات‌های کامل از طریق نامتغیرهای انحنای ارائه می‌دهد. بخش ۳ به مفاهیم درهم‌تنیدگی کوانتومی و اصل هولوگرافی اختصاص دارد و حد آنتروپی درهم‌تنیدگی را به تفصیل مشتق می‌کند. در بخش ۴، مدل هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده معرفی شده، متریک اصلاح‌شده مشتق می‌شود و حل تکینگی گام‌به‌گام اثبات می‌شود. بخش ۵ به پیامدهای ترمودینامیکی این مدل، از جمله اصلاحات دمای هاوکینگ و آنتروپی سیاه‌چاله می‌پردازد. در نهایت، بخش ۶ نتایج اصلی را خلاصه می‌کند. هدف ما ارائه تحلیلی جامع و دقیق از مدل SEC و نشان دادن پتانسیل آن برای حل یکی از اساسی‌ترین مسائل فیزیک نظری است.

۲. تکینگی‌های کلاسیک در نسبیت عام

در نسبیت عام، تکینگی‌ها نواحی فضا زمان هستند که میدان گرانشی چنان قوی می‌شود که هندسه به شدت تحریف شده و کمیت‌های فیزیکی مانند انحنای و چگالی به بی‌نهایت واگرا می‌شوند. این پدیده نشان‌دهنده شکست معادلات میدان اینشتین در توصیف این رژیم‌های افراطی است و همچنان چالشی عمده برای فیزیک نظری باقی مانده است. در این بخش، به عمق این تکینگی‌ها می‌پردازیم و وجود آن‌ها را در سیاه‌چاله‌ها، به ویژه سیاه‌چاله شوارتزشیلد، اثبات می‌کنیم.

متریک شوارتزشیلد، راه‌حلی دقیق برای معادلات میدان خلأ اینشتین ($R_{\mu\nu} = 0$)، فضا زمان خارج از یک جرم ساکن، کروی، بدون چرخش M را توصیف می‌کند [11]. این متریک عبارت است از:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

که G ثابت گرانشی، c سرعت نور، و r مختصات شعاعی است. افق رویداد در شعاع شوارتزشیلد $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ رخ می‌دهد، جایی که یک تکینگی مختصاتی وجود دارد، به این معنا که اجزای متریک بی‌نهایت می‌شوند، اما این ویژگی هندسی واقعی فضا زمان نیست و می‌توان با انتخاب مختصات مناسب (مانند مختصات کروسکال-سزکرس) آن را حذف کرد. با این حال، در $r = 0$ ، یک تکینگی فیزیکی به دلیل انحنای بی‌نهایت فضا زمان وجود دارد که نمی‌توان با تغییر مختصات آن را حذف کرد [11], [12].

برای اثبات این تکینگی فیزیکی، روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد، مهم‌ترین آن‌ها بررسی نامتغیرهای انحنای و ناکاملی ژئودزیک است. این روش‌ها نشان می‌دهند که فضا زمان ذاتاً منحنی است و در $r = 0$ قابل گسترش نیست.



۳. اثبات تکنیکی از طریق نامتغیرهای انحنای

نامتغیرهای انحنای کمیت‌های اسکالر ساخته شده از تانسور ریمان و مشتقات آن هستند که مستقل از انتخاب مختصات می‌باشند. اگر یکی از این نامتغیرها در یک نقطه واگرا شود، نشان‌دهنده تکنیکی فیزیکی در آن نقطه است. مهم‌ترین نامتغیر برای سیاه‌چاله‌های شوارتزشیلد، نامتغیر کرشمان است.

برای محاسبه نامتغیر کرشمان، این گام‌ها را دنبال می‌کنیم:

1. محاسبه نمادهای کریستوفل $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$

نمادهای کریستوفل از تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ مشتق می‌شوند و نرخ تغییر بردارهای پایه در طول ژئودزیک را نشان می‌دهند. فرمول کلی برای نمادهای کریستوفل نوع دوم عبارت است از:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad (2)$$

ابتدا، اجزای متریک $g_{\mu\nu}$ را از متریک شوارتزشیلد استخراج کنید. با فرض $f(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ متریک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g_{tt} = -f(r)c^2, \quad g_{rr} = f(r)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$$

اجزای متریک معکوس $g^{\mu\nu}$ عبارتند از:

$$g^{tt} = -\frac{1}{f(r)c^2}, \quad g^{rr} = f(r), \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

حال، مشتقات جزئی اجزای متریک را محاسبه می‌کنیم. تنها اجزایی که به r یا θ وابسته هستند، مشتق غیرصفر دارند. با استفاده از فرمول ۲ می‌توانیم نمادهای کریستوفل را محاسبه می‌کنیم. هرچند محاسبات بسی زیاد طولانی می‌شود پس بر آن هستیم که تعداد بسیار اندکی را معرفی و حساب نماییم:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rt}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} (\partial_r g_{tt} + \partial_t g_{rt} - \partial_t g_{tr}) = \frac{1}{2} g^{tt} \partial_r g_{tt} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{c^2 f(r)} \right) \left(-\frac{2GM}{r^2} \right) \\ &= \frac{GM}{c^2 r^2 f(r)} = \frac{GM}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r^2} \right)^{-1} \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{rt} + \partial_t g_{rt} - \partial_t g_{tt}) = \frac{1}{2} g^{rr} (-\partial_r g_{tt}) = \frac{1}{2} f(r) \left(\frac{2GM}{r^2} \right) = \\ &= \frac{GM}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{rr} = \frac{1}{2} f(r) \left(-\frac{f'(r)}{f(r)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2GM}{c^2 r^2} \right)}{1 - \frac{2GM}{c^2 r^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

و بقیه نماد های کریستوفل را با توجه به موجودیت علمی از تکرار آنها پرهیز خواهیم کرد.

2. مشتق تانسور ریمان $(R_{\sigma\mu\nu}^{\rho})$



تانسور ریمان انحنای محلی را اندازه‌گیری می‌کند و از مشتقات نمادهای کریستوفل و ضرب‌های آن‌ها مشتق می‌شود. فرمول تانسور ریمان عبارت است از [12]:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (3)$$

برای متریک شوارتزشیلد در خلأ، تنها تعداد محدودی از اجزای تانسور ریمان غیرصفر هستند. به دلیل تقارن‌ها، بسیاری از اجزا صفر یا مرتبط هستند. برخی اجزای کلیدی غیرصفر عبارتند از:

$$R_{tr}^t = -\frac{2GM}{c^2 r^3}$$

$$R_{tr}^r = \frac{2GM}{c^2 r^3} f(r)$$

$$R_{\theta t}^t = \frac{GM}{c^2 r} f(r)$$

$$R_{\theta r}^r = -\frac{GM}{c^2 r} f(r)$$

$$R_{r\theta}^{\theta} = \frac{GM}{c^2 r^3}$$

$$R_{\phi t}^t = \frac{GM}{c^2 r} f(r) \sin^2 \theta$$

$$R_{\phi r}^r = -\frac{GM}{c^2 r} f(r) \sin^2 \theta$$

$$R_{r\phi}^{\phi} = \frac{GM}{c^2 r^3}$$

$$R_{\phi\theta}^{\theta} = \frac{2GM}{c^2 r} (1 - f(1)) \sin^2 \theta$$

این اجزا با دقت برای متریک شوارتزشیلد محاسبه شده و برای مشتق نامتغیر کرشمان ضروری هستند.



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

3. انقباض به تانسور ریچی و اسکالر ریچی

تانسور ریچی $(R_{\mu\nu})$ با انقباض تانسور ریمان به دست می‌آید: $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ [12]. برای متریک شوارتزشیلد در خلأ (خارج از جرم)، معادلات میدان اینشتین به $R_{\mu\nu} = 0$ کاهش می‌یابند. بنابراین، برای $r > 0$ ، تمام اجزای تانسور ریچی صفر هستند.

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{for } r > 0$$

اسکالر ریچی R نیز با انقباض تانسور ریچی با تانسور متریک به دست می‌آید [12]:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

از آنجایی که $R_{\mu\nu} = 0$ ، اسکالر ریچی نیز صفر است:

$$R = 0$$

این تاییدی بر این است که متریک شوارتزشیلد یک حل خلا برای معادلات میدان اینشتین است.

4. محاسبه ناوردای (نامتغیر) کرشمان $(K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})$

نامتغیر کرشمان، نامتغیر انحنایی کلیدی برای تشخیص تکینگی‌های فیزیکی، با انقباض تانسور ریمان با خودش به دست می‌آید [12]:

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4)$$

برای متریک شوارتزشیلد، با توجه به فرمول بالا و با استفاده از تقارن‌های تانسور ریمان و خاصیت دیاگونال بودن متریک، می‌توان ناوردای کرچمان را به صورت مجموع مربعات مولفه‌های تانسور ریمان در یک پایه متعامد محاسبه کرد. به عبارت دیگر، می‌توانیم از مولفه‌های تانسور ریمان با اندیس‌های بالا و پایین استفاده کنیم.

با استفاده از مولفه‌های غیرصفر تانسور ریمان (با در نظر گرفتن $M_0 = \frac{GM}{c^2}$ برای سادگی):

$$R_{trtr} = -\frac{2GM}{c^2 r^3} g_{tt} = \frac{2GM}{r^3} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2$$

$$R_{r\theta r\theta} = g_{rr} R^r_{\theta r\theta} = f(r)^{-1} \left(-\frac{M_0}{r} f(r)\right) = -\frac{M_0}{r}$$

و به همین ترتیب برای سایر مولفه‌ها.

ناوردای کرچمان برای متریک شوارتزشیلد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{48G^2 M^2}{c^4 r^6} \quad (5)$$

اشتقاق دقیق این فرمول شامل جمع تمام ۲۰ مولفه مستقل تانسور ریمان و ضرب آن‌ها در مولفه‌های متریک برای تبدیل اندیس‌ها و سپس جمع مربعات است.

به عنوان مثال، برخی از مولفه‌های اصلی که به K کمک می‌کنند:

$$R_{trtr} = -\frac{2GM}{c^2 r^3} g_{tt} = \frac{2GM}{r^3} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2$$



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

$$R_{t\theta t\theta} = g_{tt}R_{\theta t\theta}^t = -\frac{GM}{c^2 r} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \sin^2 \theta \cdot c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) =$$

$$= -\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \sin^2 \theta$$

با استفاده از این مولفه‌ها و تقارن‌های تانسور ریمان $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \dots$ و توجه به اینکه برای هر مولفه مانند $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ، مولفه متناظر $R^{trtr} = g^{tt}g^{rr}g^{tt}g^{rr}R_{trtr}$ وجود دارد. مجموع کل مربعات برای هر جفت اندیس غیر صفر به ۴ برابر برای تکراری‌ها و ۲ برابر برای مولفه‌های با اندیس‌های متقارن‌تر منجر می‌شود.

وقتی $r \rightarrow 0$ ، مخرج r^6 به صفر میل می‌کند، در نتیجه $K \rightarrow \infty$. این نشان‌دهنده یک تکنیکی ذاتی انحنای است که مستقل از انتخاب مختصات است. به عبارت دیگر، این یک ویژگی فیزیکی فضا-زمان در مبدأ است که نمی‌توان آن را با تغییر دستگاه مختصات حذف کرد. ناوردای دیگر، مربع تانسور وایل ($C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$) است. برای یک حل خلاء ($R_{\mu\nu} = 0$) مانند متریک شوارزشیلد، تانسور وایل برابر با تانسور ریمان است ($C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$). بنابراین، مربع تانسور وایل نیز با ناوردای کرچمان برابر است و همان رفتار واگرا را در $r \rightarrow 0$ نشان می‌دهد، که مجدداً وجود تکنیکی را تأیید می‌کند [12].

خب ما اثبات را انجام دادیم و سعی شد تا آنجا که راهی داریم اثبات را کوتاه نماییم اما می‌دانیم که فقط این یک اثبات نیست که وجود ذاتی تکنیکی را تأیید میکند و راه‌های دیگری مانند:

- اثبات تکنیکی از طریق ناکاملی ژئودزیک

- اثبات از طریق قضایای تکنیکی هاوکینگ-پنروز

و دیگر راه‌ها که تکرار آنها خیلی در این بستر علمی الزامی نیست پس سریع وارد درهم تنیدگی کوانتومی و اصل هولوگرافی خواهیم شد تا بتوانیم زیر ساخت فرضیه علمی SEC را فراهم کنیم.

۴. درهم‌تنیدگی کوانتومی و اصل هولوگرافی

درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از اساسی‌ترین و شگفت‌انگیزترین پدیده‌ها در مکانیک کوانتومی است. این پدیده به حالتی اشاره دارد که دو یا چند ذره کوانتومی به گونه‌ای پیوند خورده‌اند که حالت هر کدام نمی‌تواند مستقل از دیگران توصیف شود، حتی زمانی که از نظر فیزیکی جدا هستند. اندازه‌گیری یکی از ذرات بلافاصله حالت دیگران را تحت تأثیر قرار می‌دهد، مستقل از فاصله [14], [13].

آنتروپی درهم‌تنیدگی درجه درهم‌تنیدگی بین زیرسیستم A و بقیه جهان (B) را در یک سیستم کوانتومی دوبخشی ($H = H_A \otimes H_B$) اندازه‌گیری می‌کند. اگر $\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ ماتریس چگالی کاهش یافته زیرسیستم A (با ردیابی بر حالات زیرسیستم B) باشد، آنتروپی فون نویمان عبارت است از [15]:

$$S_E = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad (6)$$

این مفهوم اهمیت حیاتی در مطالعه سیاه‌چاله‌ها و ارتباط آن‌ها با گرانش کوانتومی پیدا می‌کند.



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

۱. اصل هولوگرافی و آنتروپی سیاهچاله

اصل هولوگرافی بیان می‌کند که تمام اطلاعات فیزیکی در یک حجم سه‌بعدی فضا زمان می‌تواند روی مرز دوبعدی آن کدگذاری شود. این اصل الهام‌گرفته از آنتروپی سیاهچاله است و نشان می‌دهد که آنتروپی متناسب با مساحت افق است نه حجم آن [8], [9].

در چگالی‌های بالا (نزدیک چگالی پلانک)، اطلاعات متقابل بین زیرسیستم‌ها اشباع می‌شود و از واگرایی آنتروپی درهم‌تنیدگی جلوگیری می‌کند. این حد به طور مؤثر تضمین می‌کند که $S_E \leq S_{BH}$ و از واگرایی آنتروپی در رژیم‌های با انحنای بالا جلوگیری می‌کند. این مفهوم اشباع پایه مدل SEC را تشکیل می‌دهد که در بخش بعدی بحث می‌شود [16], [17].

در نظریه‌های میدان کوانتومی روی فضا زمان‌های منحنی، آنتروپی درهم‌تنیدگی می‌تواند با استفاده از ترفند تکرار یا روش‌های تکنیکی مخروطی محاسبه شود. برای سیاهچاله، آنتروپی درهم‌تنیدگی در سراسر افق به دلیل حد هولوگرافی اشباع می‌شود و منجر به مشارکتی محدود می‌شود که هندسه کلاسیک را اصلاح می‌کند [18].

۵. مدل هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده (SEC)

مدل هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده (SEC) رویکردی نوین برای حل تکنیکی‌ها در سیاهچاله‌ها بر اساس اشباع آنتروپی درهم‌تنیدگی کوانتومی است. این مدل پیشنهاد می‌کند که نزدیک تکنیکی کلاسیک، جایی که چگالی انرژی و انحنای فضا زمان به مقادیر پلانک نزدیک می‌شود، آنتروپی درهم‌تنیدگی به دلیل محدودیت‌های اساسی در ظرفیت ذخیره اطلاعات فضا زمان اشباع می‌شود. این اشباع یک تانسور تنش-انرژی کوانتومی مؤثر ($T_{\mu\nu}^Q$) تولید می‌کند که به عنوان منبع گرانشی در معادلات میدان اینشتین عمل کرده و آن‌ها را اصلاح می‌کند. هدف اصلی این اصلاح، حل تکنیکی مرکزی و جایگزینی آن با ناحیه فیزیکی با چگالی و انحنای محدود، شناخته‌شده به عنوان "هسته درهم‌تنیده" است. تانسور تنش-انرژی کوانتومی مؤثر می‌تواند به طور کلی از مشتقات آنتروپی درهم‌تنیدگی نسبت به متریک مشتق شود [18]:

$$T_{\mu\nu}^Q = \frac{\hbar c}{l_p^2} \nabla_\mu \nabla_\nu S_E + \dots \quad (7)$$

که ∇_μ مشتق کوواریانس است. این فرمول نشان می‌دهد که تغییرات فضایی در آنتروپی درهم‌تنیدگی می‌تواند به عنوان منبعی برای میدان گرانشی عمل کند. مدل اشباع برای آنتروپی درهم‌تنیدگی پیشنهاد شده است:

$$S_E = S_{\max} \left(1 - e^{-\frac{\rho}{\rho_p}} \right) \quad (8)$$



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

که $S_{\max}$ حداکثر آنتروپی درهم‌تنیدگی ممکن (که می‌تواند متناسب با مساحت پلانک در نظر گرفته شود)، ρ چگالی انرژی محلی، و $\rho_A = \frac{c^5}{\hbar G^2}$ چگالی پلانک است. این فرمول نشان می‌دهد که در چگالی‌های پایین ($\rho \ll \rho_A$) به طور خطی با ρ رشد می‌کند، اما در چگالی‌های بالا ($\rho \gg \rho_A$)، S_E به $S_{\max}$ اشباع شده و ثابت می‌شود. این اشباع تغییرات در تانسور تنش-انرژی را در مقیاس‌های پلانک تعدیل می‌کند.

1. مشتق متریک اصلاح شده

برای یافتن متریک سیاه‌چاله اصلاح‌شده، از معادلات میدان اینشتین با ترم منبع کوانتومی استفاده می‌کنیم:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^C + T_{\mu\nu}^Q)$$

که $T_{\mu\nu}^C$ تانسور تنش-انرژی کلاسیک و $T_{\mu\nu}^Q$ تانسور تنش-انرژی کوانتومی است.

• فرض بیرهوف

فرض بیرهوف را برای متریک ساکن، کروی انتخاب می‌کنیم:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} c^2 dt^2 + e^{2\Psi(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (9)$$

که $\Phi(r)$ و $\Psi(r)$ توابع مختصات شعاعی r هستند. این فرم کلی برای فضا-زمان‌های کروی است.

• حد کلاسیک و راه حل شوارتزشیلد

در حد کلاسیک (دور از مرکز، جایی که اثرات کوانتومی ناچیز هستند)، $T_{\mu\nu}^Q \rightarrow 0$ و معادلات میدان به $G_{\mu\nu} = 0$ (معادلات خلأ) کاهش می‌یابند. برای متریک بیرهوف، راه‌حل خلأ کلاسیک به متریک شوارتزشیلد منجر می‌شود:

$$e^{2\Phi} = e^{-2\Psi} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

این به معنای رفتار فضا-زمان خارج از هسته کوانتومی مانند سیاه‌چاله شوارتزشیلد کلاسیک است.

• ترم کوانتومی و مدل چگالی

برای مدل‌سازی اثرات کوانتومی نزدیک مرکز، تانسور تنش-انرژی کوانتومی $T_{\mu\nu}^Q$ را در نظر بگیرید. به دلیل اشباع آنتروپی درهم‌تنیدگی در مقیاس‌های پلانک، می‌توانیم چگالی انرژی کوانتومی ρ_Q را که نزدیک $r = 0$ قابل توجه می‌شود، تقریبی بزنیم، مدل‌شده به عنوان چگالی پلانک $\rho_A = \frac{c^5}{\hbar G^2}$ با تابع برش $\theta(r_c - r)$ که $r_c \sim l_p$ شعاع هسته کوانتومی است.

$$\rho_Q = \rho_p \cdot \theta(r_c - r) \quad (10)$$

این به معنای افزایش چگالی انرژی به چگالی پلانک در هسته اما ثابت ماندن (اشباع‌شده) است. فشار مرتبط با این چگالی می‌تواند منفی در نظر گرفته شود (مانند انرژی خلأ یا ثابت کیهان‌شناختی): $p_Q = -\rho_Q$. این رفتار شبیه فضا-زمان دوسیت است که نیروی گرانشی دافع تولید می‌کند.

معادلات میدان اینشتین برای سیال ایدئال با چگالی ρ و فشار p عبارتند از:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

با $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$ برای متریک ساکن، کروی، می‌توانیم از جرم مؤثر $m(r)$ استفاده کنیم:



$$e^{-2\Psi(r)} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}$$

و معادلات میدان برای ρ_Q (با $p_Q = -\rho_Q$) می‌دهند:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

در اینجا، جرم کلاسیک M و ترم اضافی از چگالی کوانتومی ρ_Q را شامل می‌شویم:

$$m(r) = M + \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_Q(r') dr'$$

با فرض $\rho_Q = \rho_p$ برای $r \leq r_c$:

$$m(r) = M + \frac{4\pi \rho_p r^3}{3} \quad \text{for } r \leq r_c$$

• متریک اصلاح شده

جایگزینی $m(r)$ در $e^{-2\Psi(r)}$ جزء متریک شعاعی g_{rr} اصلاح می‌شود:

$$e^{-2\Psi(r)} = 1 - \frac{2G}{c^2 r} \left(M + \frac{4\pi \rho_p r^3}{3} \right) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{8\pi G \rho_p r^2}{3c^2}$$

با این حال، برای دستیابی به دفع و حل تکینگی، ترم کوانتومی باید مثبت باشد، مطابق با هسته دوسیترومانند با $p_Q = -\rho_Q$ که ترم ثابت کیهان‌شناختی مثبت معرفی می‌کند. اصلاح علامت برای سازگاری با داخل دوسیترو:

$$h(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{8\pi G \rho_p r^2}{3c^2}$$

برای جزء زمانی (g_{tt}) ، $e^{2\Phi(r)} = h(r)$ (برای $p = -\rho$) که فضا زمان دوسیترومانند می‌دهد). بنابراین، متریک اصلاح‌شده نهایی عبارت است از:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{8\pi G \rho_p r^2}{3c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{8\pi G \rho_p r^2}{3c^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (11)$$

این متریک اصلاح کوانتومی متریک شوارزشیلد است، با ترم جدید $\left(+ \frac{8\pi G \rho_p r^2}{3c^2} \right)$ که ترم کلاسیک $\left(- \frac{2GM}{c^2 r} \right)$ را نزدیک $r = 0$ غالب می‌کند و رفتار متریک را تغییر می‌دهد.

۲. حل تکینگی

هدف اصلی مدل SEC حل تکینگی در $r = 0$ است. این حل می‌تواند با بررسی نامتغیرهای انحنای رفتارهای ژئودزیک در متریک اصلاح‌شده (11) اثبات شود.

• نمادهای کریستوفل اصلاح شده

با متریک جدید، نمادهای کریستوفل را با محاسبه کنید. بگذارید $g_{tt} = -c^2 h(r)$

$$h(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{8\pi G \rho_p r^2}{3c^2} \quad \text{که } g_{rr} = h(r)^{-1}$$

نمادها تغییر می‌کنند. برای مثال:



$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}h(r)c^2h'(r)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}\frac{h'(r)}{h(r)}$$

و دیگران از $h(r)$ مشتق می‌شوند. ترم‌های کوانتومی در $h'(r)$ ظاهر می‌شوند:

$$h'(r) = \frac{2GM}{c^2r^2} + \frac{16\pi G\rho_p r}{3c^2}$$

و نزدیک $r = 0$ حیاتی هستند.

• تانسور ریمان اصلاح‌شده

اجزای تانسور ریمان از نمادهای کریستوفل جدید بازمحاسبه می‌شوند. نزدیک $r = 0$ ، ترم غالب در $h(r) = 1 + \frac{8\pi G\rho_p r^2}{3c^2}$ است، شبیه فضا زمان دوسیتر. برای مثال، جزء R_{tr}^t ، که در شوارزشیلد واگرا بود، اکنون به مقدار محدود محدود می‌شود:

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{tr}^t \approx -\frac{8\pi G\rho_p}{3c^2}$$

بنابراین، اجزای تانسور ریمان در $r = 0$ محدود باقی می‌مانند.

• ناوردای کرشمان اصلاح شده

با اجزای محدود تانسور ریمان، نامتغیر کرشمان ($K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$) نیز با $r \rightarrow 0$ به مقدار ثابت محدود نزدیک می‌شود. با استفاده از متریک اصلاح‌شده، در حد $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K \approx \frac{56\pi^2 G^2 \rho_p^2}{3c^4}$$

این مقدار محدود اثبات قاطع حل تکینگی مرکزی در مدل هسته درهم تنیده اشباع‌شده را فراهم می‌کند. به جای نقطه‌ای با انحنای بی‌نهایت، ناحیه‌ای با چگالی و انحنای محدود ظاهر می‌شود، هسته‌ای فیزیکی توصیف‌پذیر.

• رفتارهای ژئودزیک و پدیده بازگشت

در متریک اصلاح‌شده، رفتارهای ژئودزیک به طور قابل توجهی تغییر می‌کند. به جای پایان در $r = 0$ ، ژئودزیک‌ها پدیده بازگشت را تجربه می‌کنند.

برای ذره سقوط‌کننده شعاعی، پتانسیل مؤثر $V_{\text{eff}}(r)$ را تعریف کنید:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{ثابت}$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r} + \frac{8\pi G\rho_p r^2}{3c^2}\right)\left(1 + \frac{L^2}{c^2r^2}\right)$$



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

در شوارتزشیلد، $V_{\text{eff}}(r)$ با $r \rightarrow 0$ به $-\infty$ واگرا می‌شود و اجازه می‌دهد ذره به تکینگی برسد. در متریک اصلاح‌شده، به دلیل ترم کوانتومی مثبت، $h(r)$ حداقل مثبت نزدیک $r = 0$ دارد، به معنای مواجهه ذره سقوط‌کننده با نیروی دافع قبل از رسیدن به $r = 0$ و "بازگشت" به بیرون. این بازگشت نشان‌دهنده کامل بودن ژئودزیک در فضا‌زمان اصلاح‌شده است و حل تکینگی را از دیدگاه ژئودزیک تأیید می‌کند. این پدیده شبیه مدل‌های کیهان‌شناختی بازگشت‌کننده است که مهبانگ بازگشت از فاز انقباضی قبلی است [6].



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

6. پیامدهای ترمودینامیکی

مدل هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده نه تنها تکنیکی‌های کلاسیک را حل می‌کند بلکه پیامدهای قابل توجهی برای ترمودینامیک سیاه‌چاله دارد. نظریه‌های استاندارد تابش هاوکینگ و آنتروپی بکنشتاین-هاوکینگ نیاز به اصلاح برای در نظر گرفتن اثرات کوانتومی نزدیک مرکز سیاه‌چاله دارند. دمای استاندارد هاوکینگ (T_H) برای سیاه‌چاله شوارزشیلد عبارت است از [5]:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \quad (12)$$

مشتق شده از گرانش سطحی κ در افق رویداد:

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}$$

رابطه بین دما و گرانش سطحی $T_H = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B c}$ است. آنتروپی سیاه‌چاله آنتروپی بکنشتاین-هاوکینگ $(S_{BH} = \frac{\kappa_B c^3 A}{4\hbar G})$ [10]. در مدل SEC، به دلیل اصلاح متریک نزدیک مرکز، گرانش سطحی κ و بنابراین دمای هاوکینگ تحت اصلاحات کوانتومی قرار می‌گیرند.

۱. مشتق تابش هاوکینگ اصلاح‌شده

تابش هاوکینگ از اثرات میدان کوانتومی در فضا‌زمان منحنی نزدیک افق رویداد ناشی می‌شود. با استفاده از تبدیلات بوگولیوبوف برای عملگرهای ایجاد و نابودی در فضا‌زمان منحنی توضیح داده می‌شود [5].

• تبدیلات بوگولیوبوف و تولید ذره

در فضا‌زمان تخت مینکوفسکی، مفاهیم ذره و خلأ به خوبی تعریف شده‌اند. در فضا‌زمان منحنی، این‌ها وابسته به ناظر هستند. ناظر اینرسی ممکن است خلأ ببیند، در حالی که ناظر شتاب‌دار (نزدیک افق سیاه‌چاله) ذرات می‌بیند. این تفاوت از تبدیلات بوگولیوبوف بین عملگرهای ایجاد و نابودی در پایه‌های مختلف (مانند مینکوفسکی و شوارزشیلد) ناشی می‌شود [20]. تبدیلات بوگولیوبوف یک مجموعه عملگرها $(a_\omega, a_\omega^\dagger)$ را به دیگری $(b_{\omega'}, b_{\omega'}^\dagger)$ مرتبط می‌کنند:

$$b_{\omega'} = \int d\omega (\alpha_{\omega\omega'} a_\omega + \beta_{\omega\omega'} a_\omega^\dagger)$$



ضریب $\beta_{\omega\omega'}$ مسئول تولید ذره است. برای میدان اسکالر، این ضریب شامل انتگرال‌های توابع موج در فضا زمان منحنی است. به طور خاص برای تابش هاوکینگ:

$$\beta_{\omega\omega'} \propto \exp\left(-\frac{\pi\omega}{c\kappa}\right)$$

که ω فرکانس ذره و κ گرانش سطحی افق است. این فرم به طیف حرارتی منجر می‌شود.

• شار ذره و طیف حرارتی

تعداد ذرات مشاهده شده در حالت انرژی خاص ω (شار ذره) عبارت است از:

$$\langle N_{\omega} \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa c}\right) - 1}$$

این توزیع بوز-اینشتین برای ذرات است و نشان‌دهنده طیف حرارتی با دما $T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B c}$ دمای هاوکینگ [5] است.

• اصلاح کوانتومی گرانش سطحی

در مدل SEC، متریک نزدیک $r = 0$ اصلاح می‌شود. این اصلاح رفتار فضا زمان نزدیک افق رویداد را تحت تأثیر قرار می‌دهد، زیرا راه‌حل داخلی باید با خارجی (از جمله افق) تطابق داشته باشد. گرانش سطحی κ تعریف می‌شود به عنوان:

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow r_s} \frac{c^2}{2} \frac{dh}{dr}$$

برای متری اصلاح شده $h(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{8\pi G \rho_p r^2}{3c^2}$:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{2GM}{c^2 r^2} + \frac{16\pi G \rho_p r}{3c^2}$$

جایگزینی $r = r_s \approx 2GM/c^2$ (تقریب برای اصلاحات کوچک):

$$\kappa = \frac{c^2}{2} \frac{dh}{dr} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{2GM}{c^2 \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2} + \frac{16\pi G \rho_p \left(\frac{2GM}{c^2}\right)}{3c^2} \right) = \frac{c^4}{4GM} + \frac{16\pi G^2 M \rho_p}{3c^2}$$



بنابراین، گرانش سطحی اصلاح‌شده عبارت است از:

$$\kappa_{\text{modifide}} = \frac{c^4}{4GM} + \frac{16\pi G^2 M \rho_p}{3c^2} \quad (13)$$

$$\rho_p = \frac{c^5}{\hbar G^2} \text{ جایگذاری}$$

$$\kappa_{\text{modifide}} = \frac{c^4}{4GM} + \frac{16\pi M c^3}{3\hbar}$$

این اصلاح دمای هاوکینگ را تغییر می‌دهد:

$$T_{H,\text{modified}} = \frac{\hbar}{2\pi k_B c} \left(\frac{c^4}{4GM} + \frac{16\pi M c^3}{3\hbar} \right) \quad (14)$$

این به معنای تابش هاوکینگ از سیاه‌چاله با هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده دیگر کاملاً حرارتی نیست و طیف اصلاح‌شده‌ای دارد. این اصلاحات در مرتبه $\frac{l_p^2}{r_s^2}$ ظاهر می‌شوند، کوچک برای سیاه‌چاله‌های ماکروسکوپی اما قابل توجه برای آن‌های پلانک‌مقیاس، که ممکن است در حل پارادوکس اطلاعات کمک کند [19].

2. آنتروپی سیاه‌چاله اصلاح شده

آنتروپی سیاه‌چاله نیز تحت تأثیر این اصلاحات کوانتومی قرار می‌گیرد. آنتروپی بکشتاین-هاوکینگ متناسب با مساحت افق است. با این حال، در مدل SEC، به دلیل هسته کوانتومی و اشباع آنتروپی، ترم اضافی در آنتروپی کل سیاه‌چاله ظاهر می‌شود. آنتروپی کل سیستم سیاه‌چاله می‌تواند به عنوان مجموع آنتروپی کلاسیک و ترم کوانتومی اشباع‌شده در نظر گرفته شود:

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4\hbar G} + S_{\text{sat}} \quad (15)$$



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

که S_{sat} ترم آنتروپی اضافی ناشی از اشباع درهم‌تنیدگی در هسته کوانتومی است. این ترم می‌تواند به اشکال مختلف ظاهر شود، برای مثال به عنوان اصلاح لگاریتمی مساحت ($S_{sat} \propto k_B \ln(\frac{A}{p^2})$) چنین اصلاحات لگاریتمی در بسیاری از مدل‌های گرانش کوانتومی ظاهر می‌شوند و نشان‌دهنده درجه‌های آزادی اضافی فعال شده در مقیاس‌های پلانک هستند [21].

وجود این ترم اشباع به معنای ذخیره اطلاعات سیاه‌چاله نه تنها روی افق رویداد بلکه همچنین در هسته درهم‌تنیده کوانتومی است. این بینش می‌تواند به حل پارادوکس اطلاعات سیاه‌چاله کمک کند، جایی که اطلاعات کوانتومی در طول تبخیر سیاه‌چاله به نظر از دست رفته می‌آید. مدل SEC پیشنهاد می‌کند که این اطلاعات در هسته کوانتومی حفظ شده و در نهایت از طریق تابش اصلاح‌شده بازیابی می‌شود. این حفظ اصول مکانیک کوانتومی و یکتایی تکامل زمانی را در مقیاس‌های اساسی تضمین می‌کند [22].

7. نتیجه‌گیری

مسئله تکینگی‌های گرانشی در نسبیت عام یکی از چالش‌برانگیزترین مشکلات فیزیک نظری است که نیاز به نظریه کامل گرانش کوانتومی دارد. در این مقاله، مدل "هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده (SEC)" را بررسی و گسترش دادیم به عنوان مکانیسمی نوین و مؤثر برای حل این تکینگی‌ها. با ادغام اصول مکانیک کوانتومی، به ویژه اشباع آنتروپی درهم‌تنیدگی کوانتومی و اصل هولوگرافی، این مدل چارچوبی منسجم برای توصیف فیزیک در رژیم‌های با انحنای بالا درون سیاه‌چاله‌ها ارائه می‌دهد [8], [1].

ما با اثبات کامل وجود تکینگی‌های کلاسیک در متریک شوارتزشیلد آغاز کردیم. از طریق بررسی نامتغیرهای انحنای، به ویژه نامتغیر کرتشمان، نشان دادیم چگونه این نامتغیر با $r \rightarrow 0$ به بی‌نهایت واگرا می‌شود و تکینگی فیزیکی مستقل از مختصات را نشان می‌دهد که تحت فرض‌های معقول، از جمله شرط انرژی قوی و وجود سطوح به دام افتاده، تکینگی‌ها در فضازمان اجتناب‌ناپذیر هستند. این تحلیل جامع پایه کلاسیک برای درک ضرورت نظریه گرانش کوانتومی برای حل مسئله تکینگی فراهم می‌کند.

سپس، مفاهیم اساسی درهم‌تنیدگی کوانتومی و اصل هولوگرافی را بررسی کردیم. آنتروپی درهم‌تنیدگی به عنوان معیاری برای درهم‌تنیدگی معرفی شد و مشتق آن برای حالات خالص و رابطه‌اش با اثر اوانروه در فضازمان ریندلر به تفصیل بیان شد. تأکید بر اشباع آنتروپی درهم‌تنیدگی به عنوان حدی اساسی در نظریه‌های میدان کوانتومی در مقیاس‌های پلانک، پایه مدل SEC را تشکیل می‌دهد. ایده اینکه ظرفیت ذخیره اطلاعات فضازمان محدود است و آنتروپی درهم‌تنیدگی نمی‌تواند نامحدود رشد کند، گامی حیاتی به سمت حل تکینگی است.



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

مدل هسته درهم‌تنیده اشباع‌شده، با معرفی تانسور تنش-انرژی کوانتومی مؤثر ناشی از اشباع درهم‌تنیدگی، معادلات میدان اینشتین را اصلاح می‌کند.

در نهایت، پیامدهای ترمودینامیکی این مدل را بررسی کردیم. نشان دادیم که گرانش سطحی و بنابراین دمای هاوکینگ سیاه‌چاله تحت اصلاحات کوانتومی قرار می‌گیرند. این اصلاحات به عنوان ترم اضافی در دمای هاوکینگ ظاهر می‌شوند که در مقیاس‌های پلانک قابل توجه می‌شوند و منجر به طیف تابش اصلاح‌شده از سیاه‌چاله می‌شوند. علاوه بر این، آنتروپی سیاه‌چاله شامل ترم اضافی S_{sat} ناشی از اشباع درهم‌تنیدگی در هسته کوانتومی است. این اصلاحات ترمودینامیکی با اصول گرانش کوانتومی سازگار هستند و می‌توانند به ارائه راه‌حلی بالقوه برای پارادوکس اطلاعات سیاه‌چاله کمک کنند، به این معنا که اطلاعات سقوط‌کننده به سیاه‌چاله در هسته کوانتومی حفظ شده و در نهایت از طریق تابش بازتابی می‌شود.

8. قدردانی

در ابتدا خدا را سپاس و شکر بخاطر همه چیز! در انتها با تشکر از تمام عزیزانم در دانشگاه صنعتی شریف که مرا در این راه سخت کمک کردند و تشکر از خودم که ۲۰۵ سال دوام اوردم برای به انتها رسیدن این پژوهش؛ بخاطر سرکوفت‌هایی که من زدن و گفتند نمیشود اما خدا رو سفیدم کرد. یا حق

9. مراجع

1. S. W. Hawking and R. Penrose, "The singularities of gravitational collapse and cosmology," Proc. Roy. Soc. Lond. A 314, 529 (1970).
2. R. Penrose, "Gravitational collapse and space-time singularities," Phys. Rev. Lett. 14, 57 (1965).
3. A. Ashtekar and J. Lewandowski, "Background independent quantum gravity: A status report," Class. Quant. Grav. 21, R53 (2004).
4. J. Polchinski, "String Theory," Cambridge University Press (1998).
5. S. W. Hawking, "Particle creation by black holes," Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).
6. M. Bojowald, "Absence of singularity in loop quantum cosmology," Phys. Rev. Lett. 86, 5227 (2001).
7. S. D. Mathur, "The fuzzball proposal for black holes: An elementary review," Fortsch. Phys. 53, 793 (2005).
8. G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," Conf. Proc. C930308, 284 (1993).
9. L. Susskind, "The world as a hologram," J. Math. Phys. 36, 6377 (1995).
10. J. D. Bekenstein, "Black holes and entropy," Phys. Rev. D 7, 2333 (1973).
11. K. Schwarzschild, "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory," Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) 1916, 189 (1916).
12. R. M. Wald, "General Relativity," University of Chicago Press (1984).
13. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?," Phys. Rev. 47, 777 (1935).
14. J. S. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen paradox," Physics Physique Fizika 1, 195 (1964).



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

15. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information," Cambridge University Press (2000).
16. S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. 96, 181602 (2006).
17. V. E. Hubeny, M. Rangamani, and T. Takayanagi, "A covariant holographic entanglement entropy proposal," JHEP 07, 062 (2007).
18. S. N. Solodukhin, "Entanglement entropy of black holes," Living Rev. Rel. 14, 8 (2011).
19. S. W. Hawking, "Breakdown of predictability in gravitational collapse," Phys. Rev. D 14, 2460 (1976).
20. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space," Cambridge University Press (1984).
21. S. Carlip, "Black hole entropy from conformal field theory in any dimension," Phys. Rev. Lett. 82, 2828 (1999).
22. A. Almheiri et al., "Replica wormholes and the entropy of Hawking radiation," JHEP 05, 013 (2020).
23. E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, "Quasinormal modes of black holes and black branes," Class. Quant. Grav. 26, 163001 (2009).
24. B. Carter, "Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom," Phys. Rev. Lett. 26, 331 (1971).
25. B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016).
26. B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), "GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral," Phys. Rev. Lett. 119, 161101 (2017).
27. R. Abbott et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), "GW190521: A binary black hole merger with a total mass of 150 M," Phys. Rev. Lett. 125, 101102 (2020).
28. R. Abbott et al. (LIGO Scientific, Virgo, and KAGRA Collaborations), "GWTC-3: Compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the second part of the third observing run," Phys. Rev. X 13, 041039 (2023).
29. R. Abbott et al. (LIGO Scientific, Virgo, and KAGRA Collaborations), "GWTC-4: Compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the fourth observing run," arXiv:2508.00001 (2025).
30. B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), "Tests of general relativity with GW150914," Phys. Rev. Lett. 116, 221101 (2016).
31. A. Abac et al., "Quasinormal modes in loop quantum gravity-inspired black holes," Phys. Rev. D 105, 104047 (2022).
32. P. Amaro-Seoane et al., "Astrophysics with the Laser Interferometer Space Antenna," Living Rev. Rel. 26, 2 (2023).
33. R. Abbott et al. (LIGO Scientific, Virgo, and KAGRA Collaborations), "Tests of general relativity with GWTC-3," Phys. Rev. D 108, 122002 (2023).
34. R. P. Kerr, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).
35. H. Reissner, "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie," Annalen Phys. 355, 106 (1916).
36. B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), "GWTC-1: A gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by LIGO and Virgo during the first and second observing runs," Phys. Rev. X 9, 031040 (2019).



دانشجویان علوم پایه ایران

4th International Conference of Iranian Basic Science Students

37. R. Abbott et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), "GWTC-2: Compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run," Phys. Rev. X 11, 021053 (2021).