



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

رویکرد طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری

فرزانه صوفیوند

گروه ریاضی، واحد دورود، دانشگاه آزاد اسلامی، دورود، ایران

خلاصه

در این پژوهش، یک روش عددی طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته برای حل مسائل کنترل بهینه کسری ارائه شده است. مشتق کسری در سامانه دینامیکی با استفاده از تعریف کاپوتو مدل سازی شده و در چارچوب مسائل کنترل بهینه یک بعدی، مشتقات با مرتبه صحیح و کسری به طور هم زمان به کار گرفته شده‌اند. برای تسهیل حل عددی، ماتریس‌های عملیاتی متناظر با مشتق کسری استخراج گردیده‌اند. در فرآیند بهینه سازی، توابع حالت و کنترل با بهره گیری از توابع پایه‌ای مناسب تقریب زده شده و مسئله کنترل بهینه کسری با تأخیر زمانی به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود. این دستگاه با استفاده از روش تکراری نیوتن حل شده و ضرایب مجهول و در نهایت توابع تقریبی حالت و کنترل به دست می‌آیند. همچنین، همگرایی روش پیشنهادی به صورت نظری بررسی شده و قضایای مربوطه اثبات گردیده‌اند.

کلمات کلیدی: مشتق کسری کاپوتو، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته، ماتریس عملیاتی، کنترل بهینه، سیستم معادلات جبری.

۱. مقدمه

کنترل بهینه یکی از شاخه‌های مهم در ریاضیات کاربردی و مهندسی است که به بررسی نحوه هدایت سیستم‌های دینامیکی به سمت عملکرد مطلوب با کمترین هزینه ممکن می‌پردازد. در این حوزه، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل به کار گرفته می‌شود تا مسیرهای متغیرهای کنترلی را تعیین کرده و تابع هدف یا هزینه را بهینه سازی کند. دستیابی به بهترین رفتار و عملکرد در فرآیندهای دینامیکی قابل کنترل، همواره از اهداف اصلی مهندسان و طراحان سیستم‌های کنترل بوده است. بهینه سازی یک فرآیند دینامیکی می‌تواند منجر به کاهش هزینه‌ها، افزایش بهره‌وری، ارتقاء قابلیت‌ها و دستیابی به نتایج مطلوب در حوزه‌های مختلف صنعتی و علمی گردد. هر سیستم دینامیکی قابل کنترل، دارای مجموعه‌ای از مشخصه‌های حالت و پارامترهای کنترلی است. مشخصه‌های حالت، وضعیت لحظه‌ای سیستم را توصیف می‌کنند و پارامترهای کنترلی امکان هدایت سیستم به سمت شرایط مطلوب را فراهم می‌سازند. برای دستیابی به کنترل بهینه در یک بازه زمانی مشخص، لازم است تغییرات این مشخصه‌ها و پارامترها به گونه‌ای تنظیم شوند که منجر به تحقق یک عملکرد بهینه گردد. روش‌های دستیابی به کنترل بهینه شامل استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین (به عنوان شرط لازم) و حل معادله همیلتون-جاکوبی-بلمن (به عنوان شرط کافی) هستند. این رویکردها در دهه ۱۹۵۰ توسط پونتریاگین در اتحاد جماهیر شوروی و ریچارد بلمن در ایالات متحده پایه گذاری شدند و نقش مهمی در توسعه نظریه کنترل ایفا کردند. با پیشرفت چشمگیر رایانه‌های دیجیتال و الگوریتم‌های عددی در دهه ۱۹۷۰، امکان ارائه روش‌های پیچیده و مبتنی بر محاسبات عددی برای حل مسائل کنترل بهینه فراهم گردید.



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

امروزه کنترل بهینه در حوزه‌های گوناگون مهندسی از جمله هوافضا، مکانیک، رباتیک، الکترونیک، فرآیندهای شیمیایی، مهندسی پزشکی و بسیاری از زیرشاخه‌های آن کاربرد گسترده‌ای دارد. به‌طور کلی، در تمامی زمینه‌هایی از علوم مهندسی که با سیستم‌های دینامیکی قابل کنترل سروکار دارند، کنترل بهینه به‌عنوان ابزاری مؤثر برای ارتقاء عملکرد سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته است. این برنامه کاربردهای متعددی در علوم، مهندسی و تحقیقات عملیات دارد. به عنوان مثال، سیستم پویا ممکن است یک فضاپیما با کنترل‌های مربوط به پیشران موشک باشد و هدف ممکن است رسیدن به ماه با حداقل هزینه سوخت باشد. یا سیستم پویا می‌تواند اقتصاد یک کشور باشد با هدف به حداقل رساندن بیکاری. کنترل در این مورد می‌تواند سیاست مالی و پولی باشد. [۴] همچنین ممکن است یک سیستم پویا برای تعبیه مشکلات تحقیقاتی عملیات در چارچوب نظریه کنترل بهینه معرفی شود. [۵] تا قبل از سال ۱۶۹۵، مدل‌هایی که برای سیستم‌ها ارائه می‌شد به صورت استاتیکی بود و ریاضیاتی که برای این سیستم‌ها مطرح می‌شد نیز از علم جبر و هندسه به دست می‌آمد. از سال ۱۶۹۵ تا ۱۹۶۰ مدل‌ها تبدیل به مدل‌های دینامیکی شده و از معادلات دیفرانسیل و انتگرال به عنوان ریاضیات مربوطه استفاده می‌شد. بعد از سال ۱۹۶۰ مدل‌های مرتبه‌ی کسری وارد عرصه‌ی علم شد نظریه معادلات دیفرانسیل تأخیری که در بسیاری از پدیده‌های زندگی واقعی مانند ارتباطات، سیستم‌های قدرت، حمل و نقل، بیولوژی، الکترونیک و شیمی کاربرد دارد [۶،۷،۸]. مسئله کنترل بهینه کسری تأخیری یک مسئله کنترل بهینه است که در آن شاخص عملکرد تحت معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری در نظر گرفته می‌شود. برای مثال چند جمله‌ای‌های برنشتاین [۹] برای حل مسئله کنترل بهینه کسری که در آن تأخیر در تابع وضعیت ظاهر می‌شود، معرفی شده است. در حالی که، نویسندگان در [۴] یک تکنیک عددی برای حل مسئله کنترل بهینه که در آن تأخیرهم در تابع وضعیت و هم در کنترل رخ می‌دهد.



تعریف: مشتق کسری کپوتو از مرتبه $\alpha > 0$ برای تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود [10]

$$c_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$$

ویژگی‌های مشتق کسری کپوتو عبارتند از:

$$I^\alpha c_0 D^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{i=0}^{n-1} x^{(i)}(0^+) \frac{t^i}{i!}, \quad \alpha > 0, x(t) \in C[0,1]$$

$$c_0 D^\alpha k = 0$$

$$c_0 D^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha} & \text{otherwise} \\ 0 & \beta < \alpha, \alpha \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$c_0 D^\alpha (\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)) = \lambda_1 c_0 D^\alpha x_1(t) + \lambda_2 c_0 D^\alpha x_2(t) \quad \text{که } k, \lambda_1, \lambda_2 \text{ اعداد ثابت هستند.}$$

چند جمله ایهای متعامد فراکروی (لژاندر) با داشتن ظاهر ساده و فرمول آسان برای حل مسائلی که درگیر با عملگرهای

انتگرال و مشتق هستند بسیار مفید می‌باشند. در سالهای اخیر از این چندجمله‌ای‌ها به عنوان مجموعه پایه ای از توابع در حل مسائل مختلف استفاده شده است.

چندجمله ایهای متعامد انتقال یافته فراکروی (لژاندر) با $\alpha = 0.5$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_{s,j}^\alpha(t) = \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^{j-k} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(j+k+2\alpha)}{\Gamma(k+\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(2\alpha)(j-k)! k! L^k} t^k, \quad 0 \leq t \leq L$$

$$\langle C_{s,i}^{(\alpha)}(t), C_{s,j}^{(\alpha)}(t) \rangle = \int_0^L C_{s,i}^{(\alpha)}(t) C_{s,j}^{(\alpha)}(t) W_s^\alpha(t) dt = \lambda_{s,j}^{(\alpha)} \delta_{i,j}$$



دانشجویان علوم پایه ایران 4th International Conference of Iranian Basic Science Students

که چون در فضای هیلبرت کار می‌کنیم $\langle \cdot \rangle$ نماد ضرب داخلی است و $\lambda_{s,j}^{(\alpha)} = (\frac{L}{2})^{2\alpha} \lambda_j^\alpha$. تابع وزن $W_s^\alpha(t)$ نیز به صورت زیر است:

$$W_s^\alpha(t) = (tL - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

شکل کلی مسئله کنترل بهینه کسری مورد بحث در این رساله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(1) \quad \min(\max) J = \int_0^1 f(t, x(t), u(t)) dt$$

$$Mx'(t) + ND^q x(t) = g(t, x(t)) + b(t)u(t-k)$$

$$x(0) = x_0, x(1) = x_1, 1 < q \leq 2$$

که در آن f, g توابعی هموار، D^q مشتق کسری کاپوتو از مرتبه q و M, N اعداد ثابتی هستند و k مقدار دیرکرد می‌باشد. محدودیت دینامیکی در نظر گرفته شده در این مسئله یک حالت کلی است که شامل مشتق مرتبه کسری است. هدف تعیین بردار کنترل $u(t)$ و بردار حالت $x(t)$ است به طوریکه شاخص رفتاری مسئله با توجه به محدودیت‌های داده شده، کمینه (بیشینه) شود. هدف از این مقاله ارائه یک روش مستقیم و بدون تشکیل معادلات همبستگی برای حل مسئله کنترل بهینه (۱) است. از آنجا که محاسبات مربوط به مشتقات کسری باعث پیچیدگی فرایند حل مسئله می‌شود، لذا یک روش پیشنهادی تشکیل ماتریس عملیاتی مشتق کسری کپوتو بر پایه چند جمله‌ای‌های متعامد گگنباور برای ساده سازی محاسبات است. ماتریس عملیاتی طوری ساخته می‌شود که با روش طیفی ریتز سازگار باشد. روش ریتز یک روش ساده و کارا برای تقریب جواب یک مساله بهینه سازی است. این روش از نظر محاسباتی ساده است و علاوه بر این، از انعطاف پذیری و دقت خوبی برخوردار است. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری بر پایه چند جمله‌ای‌های لژاندر در حل بسیاری از مسائل معادلات دیفرانسیل و کنترل بهینه جهت سهولت در محاسبات از ماتریس عملیاتی استفاده می‌گردد که استفاده از آن باعث تر شدن محاسبات می‌شود. در این بخش چگونگی بدست آوردن ماتریس عملیاتی بر پایه چند جمله‌ای‌های گگنباور انتقال یافته، با ارائه یک قضیه بیان می‌شود.

قضیه:

فرض کنید $\phi(t)$ بردار چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته در رابطه زیر باشد

$$\phi(t) = [C_{s,0}^{(\beta)}(t), C_{s,1}^{(\beta)}(t), \dots, C_{s,n}^{(\beta)}(t)]^T$$

و ν مثبت باشد. آن‌گاه

$$I^\nu \phi(t) \cong F^\nu \phi(t)$$



که I^ν انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه ν و F^ν ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل با ابعاد $(n+1) \times (n+1)$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^\nu = \begin{bmatrix} \theta_{0,0,0} & \theta_{0,1,0} & \cdots & \theta_{0,n,0} \\ \sum_{j=0}^1 \theta_{1,0,j} & \sum_{j=0}^1 \theta_{1,1,j} & \cdots & \sum_{j=0}^1 \theta_{1,n,j} \\ \sum_{j=0}^2 \theta_{2,0,j} & \sum_{j=0}^2 \theta_{2,1,j} & \cdots & \sum_{j=0}^2 \theta_{2,n,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^n \theta_{n,0,j} & \sum_{j=0}^n \theta_{n,1,j} & \cdots & \sum_{j=0}^n \theta_{n,n,j} \end{bmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود $\theta_{i,r,j}$ جایی که

$$\theta_{i,r,j} = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i-j} \Gamma(\beta + \frac{1}{2}) \Gamma(i+j+2(\beta))}{(i-j)! \Gamma(j+\beta+\frac{1}{2}) \Gamma(2\beta) \Gamma(j+\nu+1)} \times \quad (27)$$

$$\sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{r-k} r! (r+\beta) \Gamma^2(\beta) \Gamma^2(\beta + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu+j+k+\beta + \frac{1}{2}) \Gamma(r+k+2\beta)}{2^{(1-4\beta)} \pi (r-k)! k! \Gamma(r+2\beta) \Gamma(2\beta) \Gamma(k+\beta + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu+j+k+2\beta+1)},$$

بررسی همگرایی روش:

در این بخش به بیان همگرایی روش ارائه شده پرداخته شده است. نشان خواهیم داد که با افزایش تعداد چندجمله‌ای‌های گگنباثر انتقال یافته خطای تقریبی روش به صفر میل می‌کند و شاخص رفتاری L به مقدار واقعی آن همگرا می‌شود.

قضیه:

تابع $g: [0, L] \rightarrow R, g \in C^{n+1}[0, 1]$ را در نظر بگیرید. با فرض این که g_n بهترین تقریب برای تابع g در فضای Z باشد آن‌گاه

$$\|g - g_n\| \leq \frac{H}{(n+1)!} \sqrt{\frac{L^{3+2n}}{3+2n}}$$

جایی که

$$H = \max_{x \in [0, L]} |g^{n+1}(x)|$$



مثال: مسئله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} (u(t)^2 + x(t)^2) dt$$

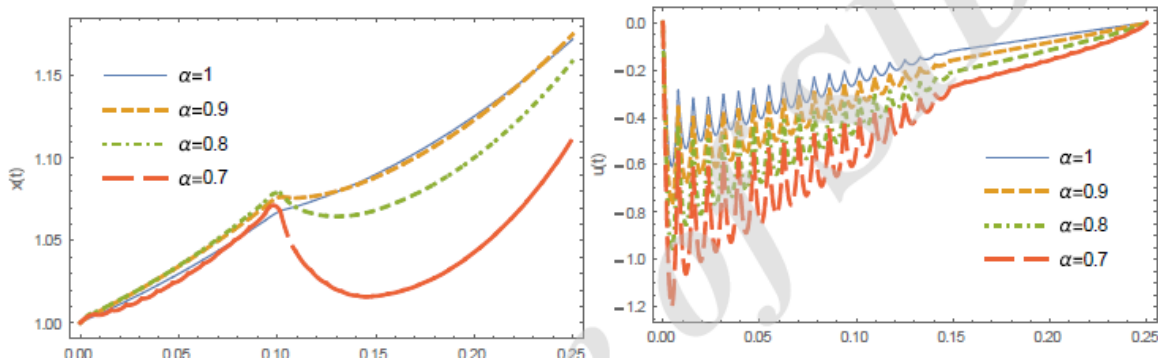
با سیستم دینامیکی زیر:

$$D^\alpha x(t) = u(t - 0.1) + x(t) + u(t)$$

$$x(0) = 1, u(t) = 0.$$

روش‌هایی که از قبل برای این مسئله پیشنهاد شده‌اند، روش چندجمله‌ای‌های لژاندر [1] مقدار تقریبی $M=7$ در روش چندجمله‌ای‌های لژاندر با [2] روش تقریب کم‌ترین مربعات = لمی آید بدست 0.0143671 و در روش دوم مقدار $J = 0.1565867$ مشاهده می‌شود.

n	N=2	N=5	N=8	N=20	N=30	N=50
J	0.1535	0.1536	0.1531	0.1440	0.1250	0.33100



شکل 1. جواب‌های تقریبی تابع کنترل (سمت راست) و تابع حالت (سمت چپ) برای $n = 50$

مثال بالا نشان می‌دهد که جواب ما به روش دوم نزدیک است.



نتیجه گیری: با توجه به اهمیت مسأله کنترل بهینه در این مقاله به بررسی بهینه سازی با دیرکرد زمانی با چند در این روش با تبدیل سیستم تأخیری به یک سیستم بدون تأخیر، جمله ایهای گگنبائر پرداخته شده است. جوابی که به دست می آید با انجام مراحل کمتر و دقیق تر بدست می آید.

۱. Bhrawy A. H., Ezz-Eldien S. S., "A new Legendre operational technique for delay fractional optimal control problems", *Calcolo*, 53 (4) (2016) 521-543.
۲. Ghomanjani F., Farahi MH., Gachpazan M., "Optimal control of time-varying linear delay systems based on the Bezier curves", *Comput., Appl. Math.* 33(3) (2014) 687-715
3. S. M. Shafiof, J. Askari, M. Shams Solary, "Hybrid Functions to Solve Fractional Optimal Control Problems Using the Collocation Method," *International Journal of Industrial Electronics, Control and Optimization*, Vol. 4, No. 3, pp. 299-311, 2021
4. N.H. Sweilam, and T.M. Al-Ajami, "Legendre spectral-collocation method for solving some types of fractional optimal control problems," *Journal of Advanced Research*, Vol. 6, No. 3, pp. 393-403, 2015
5. M. Usman, M. Hamid, T. Zubair, R.U. Haq, W. Wang, and M.B. Liu, "Novel operational matrices-based method for solving fractional-order delay differential equations via shifted Gegenbauer polynomials," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 372, pp. 1249-1285, 2020
6. M. Zamani, M. Karimi-Ghartemani, and N. Sadati, "Fopid controller design for robust performance using particle swarm optimization," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 10, pp. 169-188, 2007
7. Smith, H., *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Texts in Applied Mathematics, ۵۷, Springer-Verlag, ۲۰۱۰.۸. Kuang, Y., *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, New York, ۱۹۹۳
8. N. Ghaderi, M. H. Farahi, The Numerical Solution of Some Optimal Control Systems with Constant and Pantograph Delays via Bernstein Polynomials.IJMSI.(2020)
9. Keshavarz, E., Ordokhani, Y., Razzaghi, M.: Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations. *Appl.Math.Model.*38,6038-605(2024).