

اثر زاویه‌گذاری لایه‌ها بر بار بحرانی کمانش صفحات کامپوزیتی چندلایه: تحلیل عددی با نرم‌افزار آباکوس

^{۱*} حسین دوستی ایرانی

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا گرایش سازه‌های هوایی دانشگاه صنعتی مالک اشتر

Hosseindoostiirani8099@gmail.com

خلاصه

در این پژوهش رفتار کمانشی صفحات کامپوزیتی نازک تحت بارگذاری فشاری دوماحوره و شرایط مرزی چهارطرف لولا (SSSS) به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. هدف اصلی، مقایسه‌ی اثر آرایش لایه‌ها (layup) بر بار بحرانی کمانش و الگوهای مودال تغییر شکل است. برای این منظور، دو آرایش متداول شامل لایه‌چینی شبه‌ایزوتروپیک $[0/+45/-45/90]_2s$ و لایه‌چینی محور-غالب $[0/0/+45/-45/90]_s$ انتخاب گردید. مدل‌سازی و تحلیل در محیط نرم‌افزار آباکوس انجام شد و برای حصول دقت کافی، مطالعه‌ی همگرایی مش با اندازه‌های مختلف (۵، ۳، ۲.۵ و ۲ میلی‌متر) صورت گرفت.

نتایج نشان داد که در هر دو آرایش، مود اول کمانش به صورت الگوی پایه (1,1) بروز می‌کند، اما مقدار بار بحرانی به‌طور محسوس تحت تأثیر زاویه‌گذاری لایه‌ها قرار دارد. در حالی که ورق با آرایش شبه‌ایزوتروپیک مقدار ویژه اول $\lambda=7.569$ را نشان داد، آرایش محور-غالب با افزایش سختی خمشی در راستای بارگذاری، مقدار بالاتری معادل $\lambda=8.242$ به دست داد. این اختلاف حدود ۹ درصدی بیانگر نقش تعیین‌کننده‌ی لایه‌های صفر درجه در بهبود پایداری سازه است. همچنین مشخص شد که استفاده از مش با اندازه ۲.۵ میلی‌متر دقت کافی و کارایی محاسباتی مناسبی فراهم می‌کند. به طور کلی، یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهد که انتخاب آرایش لایه‌ها در صفحات کامپوزیتی نقش کلیدی در تعیین بار بحرانی کمانش دارد و می‌تواند به عنوان ابزاری برای طراحی بهینه‌ی سازه‌های هوافضایی مورد استفاده قرار گیرد.

۱. مقدمه

در طراحی سازه‌های هوافضایی، دستیابی به ساختارهایی سبک‌وزن و پایدار، از اهداف کلیدی محسوب می‌شود [۱]. استفاده از مواد کامپوزیتی در دهه‌های اخیر به‌طور چشمگیری افزایش یافته و انقلابی در طراحی سازه‌های هوایی ایجاد کرده است. این مواد به دلیل نسبت بالای استحکام به وزن، مقاومت در برابر خوردگی، و قابلیت طراحی لایه‌ای، جایگزین بسیاری از آلیاژهای فلزی سنتی شده‌اند [۲].

یکی از مهم‌ترین چالش‌های طراحی سازه‌های کامپوزیتی، پدیده‌ی کمانش تحت بارهای فشاری است؛ زیرا وقوع کمانش می‌تواند منجر به ناپایداری ناگهانی، افت شدید سختی و در نهایت شکست سازه شود [۳]. اهمیت این پدیده در

سازه‌های هوایی دوجندان است، چراکه پوسته‌ی بدنه، بال‌ها، دم‌ها و بسیاری از اجزای اصلی هواپیما از صفحات نازک ساخته شده‌اند که به‌طور ذاتی در برابر کمانش آسیب‌پذیر هستند [۴].

رفتار کمانشی صفحات کامپوزیتی به‌طور مستقیم تحت تأثیر آرایش لایه‌ها و زاویه‌گذاری الیاف قرار دارد [۵]. برخلاف مواد ایزوتروپیک مانند آلومینیوم، کامپوزیت‌ها رفتار آنیزوتروپیک دارند؛ بدین معنا که خواص مکانیکی آن‌ها در جهات مختلف متفاوت است. در نتیجه، طراحی layup و انتخاب زاویه‌ی مناسب الیاف نقش تعیین‌کننده‌ای در افزایش بار بحرانی کمانش ایفا می‌کند [۶]. برای مثال، آرایش‌های متقارن و متعادل مانند $[90/0]$ یا $[\pm 45]$ می‌توانند عملکرد بسیار متفاوتی در مقایسه با layup های نامتقارن یا نامتعادل داشته باشند. این ویژگی موجب می‌شود که مهندسان بتوانند با تغییر زاویه‌گذاری لایه‌ها، خواص مکانیکی سازه را بهینه‌سازی کنند [۷].

از منظر تاریخی، مطالعه‌ی کمانش سازه‌ها از قرن هجدهم آغاز شد، زمانی که اوایلر فرمول بار بحرانی ستون‌ها را ارائه کرد [۸]. در قرن بیستم، محققانی مانند تیموشنکو و فون کارمان تئوری‌های صفحات الاستیک و غیرخطی را گسترش دادند [۹]. با این حال، این تئوری‌های کلاسیک محدود به شرایط ساده‌ی بارگذاری و مواد ایزوتروپیک بودند و در تحلیل سازه‌های کامپوزیتی دقت کافی نداشتند [۱۰]. همین مسئله، به‌ویژه از دهه ۱۹۷۰ به بعد، باعث شد که روش اجزاء محدود به عنوان ابزار اصلی در تحلیل کمانش کامپوزیت‌ها مطرح شود [۱۱]. امروزه نرم‌افزارهایی مانند آباکوس امکان مدل‌سازی دقیق مواد چندلایه و بررسی کمانش خطی و غیرخطی را فراهم کرده‌اند [۱۲].

مروری بر پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد که محققان بسیاری به بررسی اثر layup بر رفتار کمانشی کامپوزیت‌ها پرداخته‌اند. لی و همکاران (۲۰۰۱) نشان دادند که افزایش نسبت الیاف در راستای بارگذاری فشاری می‌تواند بار بحرانی را تا چندین برابر افزایش دهد [۱۳]. آنتونی و همکاران (۲۰۰۷) تأثیر layup متقارن و نامتقارن را مقایسه کرده و دریافتند که layup های متقارن علاوه بر افزایش بار بحرانی، موجب تأخیر در آغاز تغییر شکل‌های موضعی می‌شوند [۱۴]. ژانگ و همکاران (۲۰۱۲) با آزمایش و تحلیل اجزاء محدود نشان دادند که layup های متوازن مانند $[90/\pm 45/0]$ عملکرد بهتری نسبت به layup های تک‌جهته دارند. [۱۵]

در سال‌های اخیر، پژوهش‌های متعددی به تحلیل دقیق‌تر این پدیده پرداخته‌اند. کومار و همکاران (۲۰۱۶) نشان دادند که وجود نقص‌های اولیه مانند انحراف لایه‌ها یا موج‌دار شدن سطح، بار بحرانی را به‌شدت کاهش می‌دهد [۱۶]. چن و همکاران (۲۰۱۸) با شبیه‌سازی عددی در آباکوس دریافتند که ترکیب لایه‌های ۰ و ۹۰ درجه بیشترین مقاومت کمانشی را ایجاد می‌کند [۱۷]. احمدی و حسنی (۲۰۲۰) با استفاده از روش ایزوژئومتریک به دقت بالاتری نسبت به روش اجزاء محدود مرسوم دست یافتند [۱۸]. همچنین، مارتینز و همکاران (۲۰۲۱) نشان دادند که سازه‌های هیبریدی (آلومینیوم-کامپوزیت) می‌توانند عملکرد پس‌کمانشی بهتری داشته باشند [۱۹].

با وجود این مطالعات، همچنان خلأهایی وجود دارد؛ بسیاری از پژوهش‌ها فقط روی شرایط مرزی خاص یا سازه‌های تقویت‌شده متمرکز بوده‌اند و کمتر به مقایسه‌ی مستقیم layup های مختلف در شرایط مرزی ساده مانند چهارطرف لولا پرداخته‌اند [۲۰]. از سوی دیگر، بررسی رفتار غیرخطی و پس‌کمانشی هنوز کمتر مورد توجه قرار گرفته است [۲۱]. بر این اساس، پژوهش حاضر با هدف بررسی اثر زاویه‌گذاری لایه‌ها بر بار بحرانی کمانش صفحات کامپوزیتی چندلایه تحت شرایط مرزی چهارطرف لولا و بارگذاری صفحه‌ای طراحی شده است.

۲. مبانی نظری و روابط تحلیلی

۲-۱. کمانش خطی تیرها:

نخستین تحلیل‌های کمانش خطی توسط اویلر در قرن هجدهم ارائه شد. او نشان داد که یک تیر باریک تحت بار محوری فشاری، در یک بار بحرانی مشخص دچار ناپایداری می‌شود. رابطه‌ی بار بحرانی به صورت زیر بیان می‌شود [۲۲]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (1)$$

که در آن E مدول یانگ، I ممان اینرسی، L طول تیر، K ضریب طول موثر می‌باشد. این رابطه پایه‌ی نظریه‌های بعدی کمانش صفحات و پوسته‌ها قرار گرفت. برای مثال، تیموشنکو و گر [۲۳] و سپس براش و المروث [۲۴] این ایده را توسعه داده و آن را به صفحات و پوسته‌ها تعمیم دادند.

۲-۲. کمانش خطی صفحات نازک:

برای یک صفحه مستطیلی نازک با ضخامت t، طول a و عرض b که تحت بار محوری یکنواخت قرار گرفته، بار بحرانی کمانش از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۲۵]:

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2)$$

که K_S ضریب کمانش برشی است. ژاکوب و همکاران [۲۶] این رابطه را در بررسی رفتار کمانش محلی پنل‌های تقویت‌شده تحت بار ترکیبی فشاری برشی به کار بردند و نشان دادند که شرایط مرزی نقش مهمی در تغییر مقدار K_S دارد. هرچند در مقاله حاضر تمرکز بر بارگذاری فشاری است، این رابطه آورده شده تا جایگاه موضوع در حوزه وسیع‌تر کمانش روشن گردد.

۲-۳. مبانی مکانیک کامپوزیت‌ها:

مواد کامپوزیتی چندلایه (laminates) ترکیبی از چندین لایه‌ی تک‌جهته (ply) هستند که هر کدام از آن‌ها شامل الیاف تقویتی و زمینه‌ی پلیمری (resin) می‌باشند. الیاف معمولاً نقش باربر اصلی را ایفا می‌کنند و رزین وظیفه‌ی انتقال تنش بین الیاف و یکپارچه‌سازی سازه را بر عهده دارد. از آنجا که جهت‌گیری الیاف در هر لایه می‌تواند متفاوت باشد، یک laminate رفتاری آنیزوتروپیک یا ارتوتروپیک از خود نشان می‌دهد [۲۷]؛ یعنی خواص مکانیکی آن در راستاهای مختلف یکسان نیست.

۲-۳-۱. رفتار مکانیکی یک لایه تک‌جهته:

هر لایه را می‌توان به صورت یک ماده ارتوتروپیک دوبعدی در نظر گرفت که خواص کشسانی آن در راستای الیاف (محور ۱) و عمود بر الیاف (محور ۲) متفاوت است. در سیستم مختصات محلی (Local axes)، رابطه تنش-کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۸]:

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \quad (1)$$

که در آن:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}^T \quad (2)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}\}^T \quad (3)$$

و ماتریس سفتی کاهش‌یافته $[Q]$ برابر است با:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

در مکانیک کامپوزیت‌ها، هر لایه (پلی) به طور معمول به صورت یک ماده‌ی ارتوتروپیک در نظر گرفته می‌شود؛ بدین معنا که خواص مکانیکی آن در راستای الیاف و در راستای عمود بر الیاف متفاوت است. [۲۹، ۲۷] مدول کشسانی در راستای الیاف E_1 بیانگر سختی ماده در راستای الیاف است، جایی که عمده‌ی بار توسط الیاف تقویتی تحمل می‌شود. در مقابل، مدول کشسانی عرضی E_2 معرف سختی ماده در راستای عمود بر الیاف است که به طور قابل توجهی کمتر از E_1 است، زیرا در این راستا رزین زمینه نقش اصلی را ایفا می‌کند. مدول برشی درون صفحه‌ای G_{12} مقاومت ماده در برابر تغییر شکل‌های برشی در صفحه‌ی الیاف-عمود بر الیاف را توصیف می‌کند، در حالی که نسبت‌های پواسون ν_{12} و ν_{21} بیانگر اثر متقابل کرنش‌ها در دو راستای عمود بر هم هستند. بر اساس رابطه‌ی تقارنی، این پارامترها باید شرط $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$ را ارضا کنند که تضمین‌کننده‌ی سازگاری ترمودینامیکی روابط ماده است (جونز، ۱۹۹۹؛ گیبسون، ۲۰۱۶).

در عمل، اختلاف میان مدول طولی و عرضی بسیار قابل توجه است؛ به گونه‌ای که مقدار E_1 معمولاً یک مرتبه‌ی بزرگی بیشتر از E_2 است. این تفاوت نشان‌دهنده‌ی نقش غالب الیاف در تحمل بارهای محوری است. برای مثال، در یک سیستم متداول کربن/اپوکسی، مقدار E_1 ممکن است بیش از ۱۳۵ گیگاپاسکال باشد، در حالی که مقدار E_2 در حدود ۸ تا ۱۰ گیگاپاسکال باقی می‌ماند [۲۹]. این آنیزوتروپی شدید، جوهره‌ی مکانیک کامپوزیت‌ها را تشکیل می‌دهد و این امکان را به مهندسان می‌دهد که با انتخاب زاویه‌ی قرارگیری لایه‌ها، رفتار سازه‌ای لمینیت را بر اساس نیاز طراحی کنترل و بهینه کنند.

وقتی لایه‌ها در راستای بارگذاری اصلی (۰ درجه) قرار می‌گیرند، لمینیت سختی محوری بالاتری از خود نشان داده و مقاومت کم‌انرژی افزایش می‌یابد. در مقابل، قرارگیری لایه‌ها در $\pm 45^\circ$ درجه موجب بهبود پاسخ برشی می‌شود و لایه‌های ۹۰ درجه نیز سختی عرضی را افزایش داده و وقوع ناپایداری‌های عرضی را به تأخیر می‌اندازند [۳۰]. بنابراین، ترکیب مناسب این لایه‌ها در یک آرایش متقارن یا متعادل، این امکان را فراهم می‌سازد که ماتریس‌های سختی غشایی و خمشی

به‌گونه‌ای طراحی شوند که رفتار کلی سازه در برابر کمناش بهینه گردد. بر همین اساس، تحلیل رفتار کمناشی ورق‌های چندلایه‌ی کامپوزیتی بدون در نظر گرفتن زاویه‌گذاری لایه‌ها، امکان‌پذیر نخواهد بود.

۴-۲. تغییر مختصات و زاویه‌گذاری لایه‌ها:

وقتی لایه‌ای تحت زاویه θ نسبت به محور مرجع چندلایه قرار می‌گیرد، ماتریس سفتی آن باید به دستگاه مختصات جهانی تبدیل شود. این کار با استفاده از ماتریس‌های تبدیل T_σ و T_ε انجام می‌شود [۳۱]:

$$\{ \varepsilon \}^g = [T_\varepsilon] \{ \varepsilon \}^l, \quad \{ \sigma \}^g = [T_\sigma] \{ \sigma \}^l$$

در نتیجه، ماتریس سفتی مؤثر لایه در دستگاه جهانی به صورت زیر تعریف می‌شود: [۳۱، ۲۷]

$$[\bar{Q}] = [T_\sigma]^{-1} [Q] [T_\varepsilon]^{-1} \quad (6)$$

این ماتریس $[\bar{Q}]$ مستقیماً وابسته به زاویه θ است. بنابراین تغییر زاویه‌ی الیاف (مثلاً 0° ، 45° ، 90°) باعث تغییر خواص سفتی لایه در راستای بارگذاری می‌شود.

۴-۵. ماتریس ABD در تئوری کلاسیک صفحات چندلایه (CLPT):

در یک چندلایه متشکل از n لایه، کل رفتار سازه توسط ماتریس معروف ABD توصیف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (7)$$

در این رابطه، بردار N شامل نیروهای درون‌صفحه‌ای مانند: $N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T$ است و بردار M ممان‌های خمشی شامل $M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ را نشان می‌دهد. کرنش‌های میانی ε^0 معرف تغییر شکل در صفحه‌ی میانی ورق و κ بیانگر انحنای آن است. سه ماتریس اصلی در این معادله عبارت‌اند از:

ماتریس A بیانگر سختی غشایی یا همان مقاومت صفحه در برابر نیروهای کششی و فشاری درون‌صفحه‌ای است. هرچه مقدار این ماتریس بزرگ‌تر باشد، ورق در مقابل کرنش‌های محوری سخت‌تر خواهد بود.

ماتریس B بیانگر کوپلینگ بین نیروهای غشایی و ممان‌های خمشی است. در لمینیت‌های متقارن مقدار B صفر است، اما در لمینیت‌های نامتقارن وجود دارد و باعث می‌شود اعمال نیروی محوری منجر به خمش یا بالعکس شود.

ماتریس D معرف سختی خمشی است و تعیین می‌کند ورق چه مقاومتی در برابر تغییر شکل‌های خمشی یا انحنای خارج از صفحه از خود نشان می‌دهد. [۲۹، ۲۷]

مقادیر این ماتریس‌ها از روی جمع اثر تک‌تک لایه‌ها محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر، هر لایه با زاویه‌گذاری و موقعیت خاص خود در ضخامت چندلایه سهمی در سختی کلی دارد. روابط کلی آن به شکل زیر است: [۳۰,۲۷]

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (8)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (9)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (10)$$

در این فرمول‌ها، مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش‌یافته‌ی هر لایه در دستگاه مختصات کلی هستند و مختصات عمودی مرزهای هر لایه نسبت به صفحه‌ی میانی چندلایه است. [۳۰,۲۷]

بنابراین، ماتریس‌های A، B و D پیوند مستقیم بین خصوصیات ریزمقیاس (خواص هر لایه و زاویه‌گذاری آن) و رفتار کلان چندلایه ایجاد می‌کنند. اهمیت این رابطه در تحلیل کماتش بسیار زیاد است؛ زیرا بار بحرانی کماتش ورق‌های کامپوزیتی تابع مستقیم مقادیر سختی غشایی (A) و سختی خمشی (D) است. اگر layup به گونه‌ای انتخاب شود که سختی در راستای بارگذاری افزایش یابد (مثلاً با افزایش درصد لایه‌های ۰ درجه)، مقدار D افزایش یافته و بار بحرانی کماتش بالاتر می‌رود. از طرف دیگر، وجود layup نامتقارن ($B \neq 0$) می‌تواند رفتار کماتش را پیچیده‌تر کند و موجب بروز مودهای ترکیبی شود.

۲-۶. تأثیر آرایش لایه‌ها:

در لمینیت‌های چندلایه، آرایش لایه‌ها (layup) تعیین‌کننده‌ی توزیع سختی درون صفحه‌ای و خمشی است و از طریق ماتریس‌های A, B, D (سختی غشایی/کوپل/خمشی) بر پاسخ پایداری اثر می‌گذارد. در لمینیت‌های متقارن، ماتریس کوپلینگ $B=0$ می‌شود و کوپل نیرو-خمش از بین می‌رود؛ این حالت معمولاً رفتار پیش‌بینی‌پذیرتر و پایدارتری در کماتش دارد، چون تغییر شکل‌های خمشی و غشایی از هم «ناکوپل» می‌مانند. در لمینیت‌های نامتقارن، $B \neq 0$ و هر نیروی غشایی می‌تواند خمش القا کند (و برعکس). این کوپلینگ، منحنی‌های پایداری را پیچیده‌تر می‌کند و می‌تواند به مودهای ترکیبی بین خمش‌های دو راستا یا بین خمش و پیچش منجر شود. در لمینیت‌های متعادل (مانند $[\pm 45]$ یا layup های متوازن $[0/\pm 45/90]_s$) مؤلفه‌های برشی مؤثر D_{66} و ترکیبات $(D_{12} + 2D_{66})$ به شکلی «متوازن» تقویت می‌شوند و توانایی ورق در مقابله با مودهای مورب/برشی تقویت می‌گردد.

از دید طراحی، افزایش سهم لایه‌های هم‌راستا با محور بارگذاری فشاری) معمولاً به افزایش A_{11} و مؤلفه‌های خمشی D_{11} می‌انجامد و بنابراین بار بحرانی کمانش در راستای x را بالا می‌برد. به‌طور مشابه، لایه‌های 90° مقاومت عرضی را تقویت می‌کنند (افزایش A_{22}, D_{22}) و آرایش‌های $\pm 45^\circ$ با افزایش G_{12} و سهم D_{66} ، پایداری در برابر مودهای مورب/برشی را بهبود می‌دهند. [۳۰، ۲۷]

۲-۷. ارتباط با کمانش:

پیوند میان layup و پایداری کمانشی، از روابط میکروساختاری (خواص هر ply و زاویه‌گذاری آن) به رفتار کلان (بار بحرانی) از مسیر ماتریس‌های A, D برقرار می‌شود. در چارچوب CLPT، معادله پایداری خمشی غشایی ورق کامپوزیتی به ضرایب خمشی D_{ij} و نیروهای درون‌صفحه‌ای N_x, N_y, N_{xy} وابسته است. افزایش D_{11}, D_{22} (به‌واسطه‌ی layup مناسب) سختی خمشی را بالا برده و بار بحرانی را افزایش می‌دهد؛ در حالی که الگوی A_{ij} و G_{12} تعیین می‌کند کدام مود شکل کمانش (m, n) کم‌انرژی‌تر و محتمل‌تر است [۲۹]. نتیجه‌ی عملی: با یکسان نگه‌داشتن هندسه و شرایط مرزی، فقط با تغییر layup می‌توان منحنی‌های پایداری را جابه‌جا کرد ابزاری کلیدی برای سبک‌سازی همراه با حفظ پایداری.

۲-۸. روابط تحلیلی کمانش ورق کامپوزیتی:

۲-۸-۱. معادله کلی پایداری:

در یک ورق مستطیلی با ابعاد $a \times b$ و لبه‌های چهارطرف ساده (SSSS)، شکل تغییرمکان خارج از صفحه برای مود (m, n) به‌صورت:

$$w(x, y) = W \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

فرض می‌شود. با جایگذاری در معادله تعادل خمشی غشایی و در نظر گرفتن بارهای درون‌صفحه‌ای N_x, N_y, N_{xy} ، شرط کمانش (رابطه ویژه) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید: [۳۱]

$$D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + N_x\alpha^2 + N_y\beta^2 + 2N_{xy}\alpha\beta = 0 \quad (5)$$

که در آن $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ و $\beta = \frac{n\pi}{b}$ هستند. این معادله، چارچوب عمومی تعامل بارهای محوری/برشی با سختی‌های خمشی ارتوتروپیک را فراهم می‌کند.

۲-۸-۲. بار بحرانی برای فشار یک‌محوره:

اگر ورق تحت فشار یک‌محوره در راستای x باشد ($N_x < 0$)، با قرارداد فشاری، بزرگی بار بحرانی یک‌محوره برای مود (m, n) از رابطه بالا به‌صورت زیر استخراج می‌شود: [۳۱، ۲۳]

$$N_{x,cr}^{(m,n)} = D_{11}\alpha^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})\beta^2 + D_{22}\frac{\beta^4}{\alpha^2} \quad (6)$$

کوچک‌ترین مقدار $N_{x,cr}^{(m,n)}$ بر روی همه‌ی زوج‌های مثبت (m,n) بار بحرانی کمناش ورق را تعیین می‌کند. در حد ایزوتروپیک که $D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D$, $D_{12} = \nu D$, $D = D_{11} = D_{22}$ و ، رابطه بالا به فرمول کلاسیک ایزوتروپ و نهایتاً:

$$N_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2} , \quad \sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (7)$$

تقلیل می‌یابد، که k ضریب کمناش وابسته به شرایط مرزی و نسبت منطری $\frac{a}{b}$ است.

۲-۸-۳. فشار دوماحوره و برش درون صفحه:

برای بار دوماحوره و/یا برش درون صفحه، همان شرط کلی کاربرد دارد و می‌توان آن را به صورت حل ویژه نوشت:

$$N_x \alpha^2 + N_y \beta^2 + 2N_{xy} \alpha \beta = -[D_{11} \alpha^4 + 22(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 + D_{22} \beta^2] \quad (8)$$

این رابطه سطح برهم‌کنش کمناش را در فضای برای مود (m,n) توصیف می‌کند؛ مقدار بحرانی، کوچک‌ترین N هایی است که این تساوی را ارضا کنند. در عمل، برای هر مود (m,n) یک «سطح تسلیم پایداری» به دست می‌آید و حداقل روی همه مودها انتخاب می‌شود. [۳۱]

۲-۸-۴. اتصال صریح به layup از طریق (ABD):

برای لمینیت‌های متقارن (که $B=0$)، ماتریس خمشی D مستقیماً از جمع مشارکت ply ها به صورت [۲۹,۲۷]:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (9)$$

تأثیر زاویه‌گذاری لایه‌ها بر رفتار کمناشی ورق‌های کامپوزیتی به طور مستقیم از طریق ضرایب سختی موجود در ماتریس خمشی D قابل تبیین است. هنگامی که درصد لایه‌های صفر درجه که در راستای بارگذاری اصلی قرار دارند افزایش می‌یابد، مقدار سختی طولی هر لایه $(\bar{Q}_{11})_k$ افزایش یافته و در نتیجه ضریب سختی خمشی کلی D_{11} بزرگ‌تر می‌شود. حاصل این تغییر، افزایش بار بحرانی کمناش در راستای x و بهبود پایداری ورق در برابر بارهای فشاری محوری است. در مقابل، هنگامی که لمینیت حاوی تعداد بیشتری از لایه‌های $\pm 45^\circ$ باشد، مؤلفه‌ی مرتبط با سختی برشی $(\bar{Q}_{66})_k$ افزایش می‌یابد و به همراه آن ترکیب $D_{12} + 2D_{66}$ نیز تقویت می‌شود. این تغییر سبب بالا رفتن مقاومت ورق در برابر مودهای کمناشی مورب یا برشی می‌گردد. همچنین، افزایش سهم لایه‌های 90° عمدتاً موجب افزایش سختی خمشی عرضی D_{22} می‌شود و توان ورق را در مقابله با مودهای کمناشی که تغییر شکل غالب آن‌ها در راستای y است بهبود می‌بخشد. بدین ترتیب، یک ارتباط علت و معلولی روشن به دست می‌آید: طراح می‌تواند تنها با تغییر آرایش و زاویه‌گذاری لایه‌ها، بدون نیاز به تغییر هندسه یا شرایط مرزی، منحنی‌های پایداری کمناش را جابه‌جا کند. این قابلیت در واقع یکی از مهم‌ترین مزیت‌های کامپوزیت‌های لایه‌ای در طراحی‌های هوافضایی محسوب می‌شود، زیرا امکان دستیابی همزمان به وزن کمتر و پایداری بیشتر را فراهم می‌کند. [۲۹,۳۰,۲۷]

۹-۲. حل عددی:

برای بررسی رفتار کمانشی ورق‌های کامپوزیتی، یک مدل عددی در نرم‌افزار آباکوس ایجاد شد. هندسه‌ی انتخاب‌شده یک ورق مربع به ابعاد $a=b$ بود که در این مطالعه مقدار $a=b=300$ میلی‌متر در نظر گرفته شد. ضخامت کل ورق برابر با $t=2$ میلی‌متر تعیین شد. ورق تحت بارگذاری فشاری دوماحوره مساوی قرار گرفت، به‌گونه‌ای که نیروی فشاری یکنواخت با مقدار یکسان در هر دو راستای x و y اعمال شد ($N_x=N_y$). این شرایط بارگذاری نمایانگر حالت‌هایی است که در پوسته‌های بدنه و بال هواپیما، به‌ویژه تحت تنش‌های فشاری چندمحوره، رخ می‌دهد.

شرایط مرزی به‌صورت چهارطرف لولا تعریف شد. در این شرایط، جابجایی عمودی ورق (w) در تمام لبه‌ها صفر است، در حالی که چرخش حول لبه‌ها آزاد گذاشته می‌شود. چنین شرایطی در تحلیل کمانش صفحات به‌عنوان یک حالت مرزی متداول و مرجع انتخاب می‌شود، زیرا امکان مطالعه‌ی مودهای کمانش پایه‌ای و مقایسه با نتایج تحلیلی را فراهم می‌کند. برای جلوگیری از جابجایی صلب صفحه درون‌صفحه‌ای، قیود نقطه‌ای در برخی گوشه‌ها به‌صورت حداقلی اعمال شد تا پایداری محاسباتی مدل تضمین شود.

تحلیل کمانش به‌صورت تحلیل خطی مقدار ویژه در آباکوس انجام شد. در این روش ابتدا یک بار مرجع در قالب تنش فشاری یکنواخت اعمال می‌شود و سپس نرم‌افزار با حل یک مسئله مقدار ویژه، ضرایب مقیاس‌گر λ و مودهای متناظر را به دست می‌آورد. بار بحرانی کمانش از ضرب مقدار ویژه در بار مرجع به دست می‌آید. $N_{cr} = \lambda \cdot N_{ref}$ این روش به دلیل سادگی، سرعت و دقت مناسب، ابزاری استاندارد برای مقایسه‌ی رفتار کمانشی در مواد مختلف محسوب می‌شود. ماده‌ی ورق از نوع کامپوزیت پلیمری تقویت‌شده با الیاف کربن انتخاب شد که یکی از پرکاربردترین مواد در صنایع هوافضایی است. خواص مکانیکی هر لایه بر اساس داده‌های متداول مواد CFRP در نظر گرفته شد: مدول کشسانی در راستای الیاف $E_1=135$ گیگاپاسکال، مدول کشسانی عرضی $E_2=10$ گیگاپاسکال، مدول برشی درون‌صفحه $G_{12}=5$ گیگاپاسکال، و نسبت پواسون $\nu_{12} = 0.3$ ضخامت هر لایه برابر با 0.125 میلی‌متر تعریف گردید. برای دستیابی به ضخامت کل 2 میلی‌متر، در مجموع 16 لایه در مدل لحاظ شد.

به‌منظور بررسی تأثیر زاویه‌گذاری لایه‌ها بر رفتار کمانشی، دو نوع لایه‌چینی متقارن و متعادل انتخاب شد: (۱) آرایش شبه‌ایزوتروپیک $[0/+45/-45/90]_2s$ که سختی تقریباً یکسانی در جهات مختلف ایجاد می‌کند، و (۲) آرایش محور-غالب $[0/0/+45/-45/90]_s$ که سهم بیشتری از لایه‌های 0 درجه دارد و انتظار می‌رود مقاومت کمانشی بالاتری در راستای بارگذاری محوری ایجاد کند. انتخاب این دو لایه‌چینی امکان مقایسه‌ی رفتار کمانشی در شرایطی با توزیع سختی متعادل و شرایطی با سختی محوری تقویت‌شده را فراهم می‌سازد.

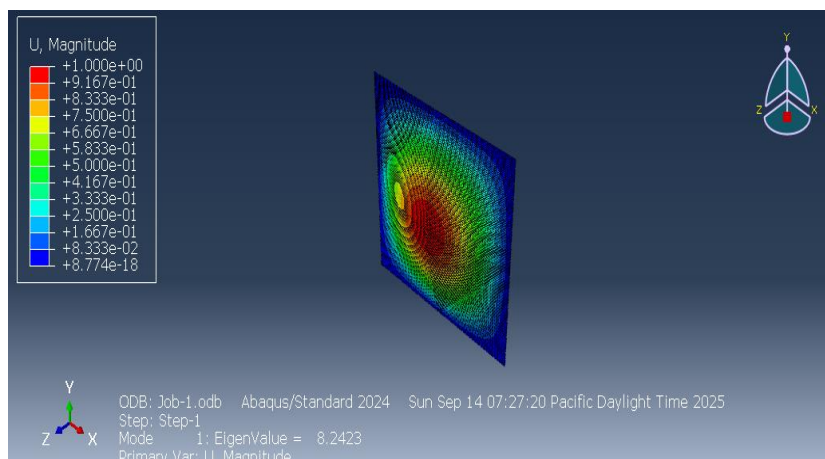
برای گسسته‌سازی هندسه از المان‌های پوسته‌ای چهارگره‌ای کاهش‌یافته (S4R) استفاده شد. مش اولیه با اندازه تقریبی $a/50$ تولید شد و برای بررسی همگرایی، تحلیل با مش‌های ریزتر ($a/75$ و $a/100$) نیز تکرار گردید. در نهایت، نتایج عددی شامل بارهای بحرانی کمانش و مودهای متناظر استخراج و برای هر لایه‌چینی مورد مقایسه قرار گرفت.

۹-۲.۱. نتایج حل عددی:

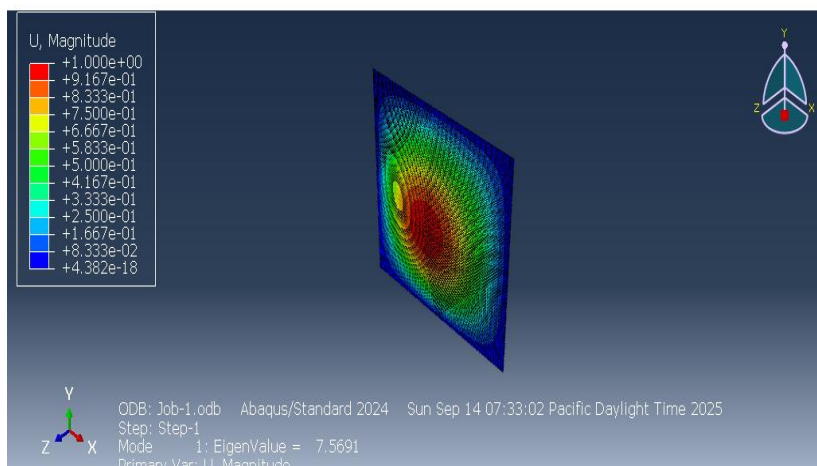
برای بررسی رفتار کمانشی ورق کامپوزیتی مربعی با شرایط مرزی چهارطرف لولا (SSSS) و بارگذاری فشاری دوماحوره مساوی ($N_x=N_y$)، تحلیل مقدار ویژه در نرم‌افزار آباکوس انجام شد. نتایج برای دو لایه‌چینی مختلف شامل آرایش شبه‌ایزوتروپیک $[0/+45/-45/90]_2s$ و آرایش محور-غالب $[0/0/+45/-90/45]_s$ استخراج گردید.

شکل مود بحرانی در هر دو حالت به صورت یک نیم‌موج در دو راستای X و Y ظاهر شد که مطابق انتظار مود پایه $(1,1)$ در صفحات مربعی با شرایط مرزی SSSS است. در شکل ۱، فرم تغییرشکل مود بحرانی برای آرایش شبه‌ایزوتروپیک نمایش داده شده است و در شکل ۲، مود متناظر برای آرایش محور-غالب نشان داده شده است. مقایسه‌ی این دو شکل به خوبی مشابهت مود و تفاوت مقدار بار بحرانی را نشان می‌دهد.

شکل ۱- شکل مود اول کمانش خطی ورق کامپوزیتی مربعی با شرایط مرزی چهارطرف لولا (لایه چینی اول)



شکل ۲- شکل مود اول کمانش خطی ورق کامپوزیتی مربعی با شرایط مرزی چهارطرف لولا (لایه چینی دوم)



مقدار ویژه اول برای آرایش شبه‌ایزوتروپیک برابر با $\lambda=7.569$ و برای آرایش محور-غالب برابر با $\lambda=8.242$ به دست آمد (جدول ۱). با توجه به این که بار مرجع لبه‌ای $q=1 \text{ N/mm}$ تعریف شده بود، مقادیر ویژه مستقیماً معرف نیروی بحرانی واحد طول (N_{cr}) هستند. بنابراین، نیروی بحرانی واحد طول در دو حالت به ترتیب 7.569 N/mm و 8.242 N/mm محاسبه شد.

جدول ۱. مقادیر ویژه اول (λ_1) برای دو لایه چینی

لایه چینی	مقدار ویژه اول λ_1	مود بحرانی غالب
شبه‌ایزوتروپیک [0/+45/-45/90] _{2s}	7.569	(1,1)
محور-غالب [0/0/+45/-45/90] _s	8.242	(1,1)

برای ضخامت کل ورق $t=2$ میلی‌متر، تنش بحرانی معادل از رابطه $\sigma_{cr}=N_{cr}$ به دست آمد که برابر با ۳.۷۸۵ MPa برای آرایش شبه‌ایزوتروپیک و ۴.۱۲۱ MPa برای آرایش محور-غالب است. همچنین بار بحرانی کل روی هر لبه به طول ۳۰۰ میلی‌متر برابر با ۲۲۷۱ N و ۲۴۷۳ N محاسبه گردید. این نتایج در جدول ۲ خلاصه شده‌اند.

جدول ۲. مقایسه نتایج بحرانی کمانش برای دو لایه چینی

لایه چینی	N_{cr} (N/mm)	σ_{cr} (MPa)	P_{cr} (N)
شبه‌ایزوتروپیک [0/+45/-45/90] _{2s}	7.569	3.785	2271
محور-غالب [0/0/+45/-45/90] _s	8.242	4.121	2473

در نهایت، بررسی همگرایی مش نشان داد که با ریزتر شدن شبکه از اندازه ۵ میلی‌متر به ۲ میلی‌متر، مقادیر ویژه تقریباً پایدار شده و اختلاف کمتر از ۰.۰۲ درصد حاصل شد. در شکل ۳ تغییر شکل مود بحرانی برای مش‌های مختلف و در جدول ۳ مقادیر ویژه و درصد تغییر نسبی آن‌ها ارائه شده است. بر این اساس، مش با اندازه ۲.۵ میلی‌متر به عنوان شبکه‌ی بهینه انتخاب گردید.

جدول ۳. بررسی همگرایی مش (مود بحرانی)

تغییر نسبی (%)	نیروی بحرانی	مقدار ویژه اول	تعداد المان در هر ضلع	اندازه المان (mm)
—	۷.۵۷۸۹	۷.۵۷۸۹	۶۰	۵
۰.۱۱	۷.۵۷۰۸	۷.۵۷۰۸	۱۰۰	۳
۰.۰۲	۷.۵۶۹۱	۷.۵۶۹۱	۱۲۰	۲.۵
۰.۰۲	۷.۵۶۷۸	۷.۵۶۷۸	۱۵۰	۲

برای اطمینان از دقت نتایج تحلیل کمانش خطی، مطالعه‌ی همگرایی مش انجام شد. ورق مربعی با ابعاد ۳۰۰×۳۰۰ میلی‌متر تحت بارگذاری فشاری دوماحوره مساوی ($N_x=N_y$) مدل‌سازی گردید و تحلیل مقدار ویژه برای اندازه‌های مختلف المان پوسته چهارگره‌ای کاهش‌یافته (S4R) اجرا شد. اندازه‌ی المان‌ها به ترتیب ۵، ۳، ۲.۵ و ۲ میلی‌متر انتخاب شد که معادل حدود ۶۰، ۱۰۰، ۱۲۰ و ۱۵۰ المان در هر ضلع ورق است.

مقادیر ویژه اول (λ_1) برای مود بحرانی در این چهار حالت به ترتیب برابر با ۷.۵۷۸۹، ۷.۵۷۰۸، ۷.۵۶۹۱ و ۷.۵۶۷۸ به دست آمد. مقایسه‌ی این نتایج نشان می‌دهد که اختلاف نسبی بین مش‌های ۵ و ۳ میلی‌متری تنها حدود ۰.۱ درصد

بوده و این اختلاف در گذر از مش ۳ به ۲.۵ میلی‌متری به ۰.۰۲ درصد کاهش یافته است. در نهایت، تفاوت بین نتایج مش ۲.۵ و ۲ میلی‌متر کمتر از ۰.۰۲ درصد بوده که نشان‌دهنده‌ی همگرایی کامل نتایج است.

بر اساس این بررسی، مقدار بحرانی کمانش همگرا حدود $N_{Cr} \approx 7.56 \text{ N/mm}$ برآورد گردید. با توجه به ضخامت ورق $t=2$ میلی‌متر، تنش بحرانی متناظر برابر با $\sigma_{Cr} \approx 3.78 \text{ MPa}$ محاسبه می‌شود. همچنین بار بحرانی کل روی هر لبه به طول ۳۰۰ میلی‌متر برابر با $P_{Cr} \approx 2270 \text{ N}$ به‌دست آمد.

در نتیجه، می‌توان بیان کرد که مش ۲.۵ میلی‌متری دقت کافی برای ادامه‌ی تحلیل‌ها دارد و انتخاب این اندازه مش تعادل مناسبی میان هزینه‌ی محاسباتی و دقت نتایج فراهم می‌کند.

۳. نتیجه‌گیری:

در این پژوهش رفتار کمانشی یک ورق کامپوزیتی مربعی تحت بارگذاری فشاری دوماحوره مساوی و شرایط مرزی چهارطرف لولا به‌صورت عددی با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مورد مطالعه قرار گرفت. برای بررسی تأثیر آرایش لایه‌ها بر پایداری کمانشی، دو لایه‌چینی متقارن و متعادل شامل آرایش شبه‌ایزوتروپیک $[0/+45/-45/90]_2s$ و آرایش محور-غالب $[0/0/+45/-45/90]_s$ انتخاب شد. نتایج حاصل نشان داد که در هر دو حالت، مود بحرانی به‌صورت شکل پایه (1,1) ظاهر می‌شود، اما مقدار بار بحرانی به‌شدت تحت تأثیر زاویه‌گذاری لایه‌ها قرار دارد.

مقایسه نتایج عددی نشان داد که افزایش سهم لایه‌های ۰ درجه در آرایش محور-غالب موجب افزایش سختی خمشی در راستای بارگذاری شده و در نتیجه بار بحرانی کمانش حدود ۹ درصد نسبت به آرایش شبه‌ایزوتروپیک افزایش یافته است. این یافته نشان می‌دهد که طراحی مناسب لایه‌چینی می‌تواند پایداری سازه‌های کامپوزیتی را بدون افزایش قابل توجه جرم بهبود بخشد.

علاوه بر این، مطالعه همگرایی مش نشان داد که نتایج تحلیل کمانش در شبکه‌های ریز به سرعت پایدار می‌شوند و استفاده از مش با اندازه ۲.۵ میلی‌متر دقت کافی و هزینه محاسباتی بهینه‌ای را فراهم می‌آورد.

به طور کلی، نتایج این تحقیق بر اهمیت انتخاب آرایش لایه‌ها در طراحی سازه‌های کامپوزیتی هوافضایی تأکید می‌کند. با توجه به حساسیت بالای صفحات نازک به پدیده‌ی کمانش، بهره‌گیری از لایه‌چینی‌های بهینه می‌تواند به افزایش ایمنی، کاهش وزن و ارتقای عملکرد سازه‌ها در کاربردهای پروازی منجر شود.

۴. مراجع:

1. Jones, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press, 1999.
2. Barbero, E. J. *Introduction to Composite Materials Design*. CRC Press, 2018.
3. Reddy, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press, 2004.
4. Daniel, I. M., & Ishai, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press, 2006.
5. Gibson, R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. CRC Press, 2011.
6. Kaw, A. K. *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press, 2005.

7. Vinson, J. R., & Sierakowski, R. L. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Springer, 2008.
8. Euler, L. *De Columnis Erectis*. 1744.
9. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, 1961.
10. Von Kármán, T. *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, 1910.
11. Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. *The Finite Element Method*. Elsevier, 2000.
12. ABAQUS Documentation, Dassault Systèmes, 2023.
13. Lee, S. H., et al. "Buckling behavior of composite laminates with fiber orientation." *Composite Structures*, 2001.
14. Anthony, D., et al. "Effect of symmetric and asymmetric layups on buckling of composite plates." *Composite Science and Technology*, 2007.
15. Zhang, Y., et al. "Experimental and numerical study on balanced layups for buckling resistance." *Composite Structures*, 2012.
16. Kumar, R., et al. "Imperfection sensitivity of laminated composites under compression." *Thin-Walled Structures*, 2016.
17. Chen, X., et al. "Finite element simulation of laminate buckling in Abaqus." *Composite Structures*, 2018.
18. Ahmadi, M., & Hasani, H. "Iso-geometric analysis of buckling in laminated plates." *Applied Composite Materials*, 2020.
19. Martinez, A., et al. "Post-buckling of hybrid aluminum-composite plates." *Composite Structures*, 2021.
20. Shen, H. S. *Postbuckling Behavior of Plates and Shells*. Springer, 2017.
21. Singer, J., Arbocz, J., & Weller, T. *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures*. Wiley, 2002.
22. Euler, L. *De Columnis Erectis*. 1744.
23. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, 1961.
24. Brush, D. O., & Almroth, B. O. *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. McGraw-Hill, 1975.



25. Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959.
26. Jacob, G., et al. "Local buckling of stiffened composite panels under combined compression and shear." *Composite Structures*, 2010.
27. Jones, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis, 1999.
28. Gibson, R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. CRC Press, 2016.
29. Daniel, I. M., & Ishai, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press, 2006.
30. Barbero, E. J. *Introduction to Composite Materials Design*. CRC Press, 2018.
31. Reddy, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC Press, 2004.
32. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, 1961.